PENELOPE MADDY

Y EL NATURALISMO EN FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

> Holding scientific naturalism up for philosophical scrutiny and challenging its misconceptions is of the first importance both for understanding ourselves and our place in the world, and also for the future direction of philosophy.
>
> (De Caro & Macarthur 2004, 1)

I. Naturalismo en Filosofía de las Matemáticas

Después de varias décadas de relativo estancamiento, las últimas dos décadas han visto un marcado renacimiento en la discusión filosófica sobre las matemáticas, su conocimiento, su lenguaje y sus objetos. Tras vivir su propio *anno mirabilis* en 1997, hace apenas ocho años – cuando Penelope Maddy, Stewart Shapiro, Michael Resnik, Reuben Hersch John Burgess y Gideon Rosen publicaron obras seminales –, la filosofía de las matemáticas se encuentra hoy en día en un renovado estado de evolución donde nuevas propuestas – estrucutralistas, ficcionalistas, nominalistas, platonistas y neo-logicistas – han redibujado el mapa de … mas allá de las viejas discusiones clásicas entre formalistas, intuicionistas y logicistas.

Al igual que en mucha de la filosofía analítica (o post-analítica) contemporánea (De Caro y Macarthur 2004), el ímpetu naturalista se ha vuelto la ortodoxia en discusiones filosóficas alrededor de la matemática.

Sin embargo, diferencia de mucha de la filosofía de las ciencias naturales contemporánea, la filosofía de las matemáticas de las últimas décadas sigue discutiendo aspectos que podríamos llamar *fundacionales* de la disciplina. Preguntas como ¿es objetivo el conocimiento matemático? y, si es así, ¿cómo garantizan las prácticas matemáticas su objetividad?, ¿cuál es el significado de los términos matemáticos? y, por supuesto, ¿existen los objetos matemáticos? y, si es así, qué tipo de existencia tienen y cómo podemos conocerlos? siguen siendo las preguntas que guían la discusión filosófica en el área.[1]

Por supuesto, hay muchas líneas entrecruzadas en la discusión y prácticamente cualquiera de estas preguntas fundamentales podría servir de eje para introducirse en la nueva discusión contemporánea en filosofía de las matemáticas. Una excelente introducción o selección de textos representativos y fundamentales podría escribirse siguiendo las discusiones epistemológica so semánticas, por ejemplo. Sin embargo, he elegido guiar esta colección por el problema ontológico en el marco del naturalismo no solamente por ser una de las líneas de discusión más nutridas en la literatura reciente, sino también por que a través de la discusión ontológica, cuestiones centrales sobre el conocimiento matemático, su aplicación y la interpretación semántica de su lenguaje, revelan mucha de su relevancia filosófica. Después de todo, como espero quedará evidentemente claro tras la lectura de los textos incluidos en esta selección, la pregunta por la existencia o inexistencia de los objetos matemáticos es actualmente abordada bajo la forma de la pregunta si es necesario aceptar la existencia de objetos matemáticos para dar sentido al conocimiento y la aplicación de las matemáticas. Por otro lado, la pregunta

[1]. En este sentido, la filosofía de las matemáticas naturalizada que estudiaremos está más alejada de las corrientes naturalizadas en filosofía de la ciencia, que del resto de la filosofía. Como han señalado Wagner y Warner (2003, 2), fuera de la filosofía de la ciencia, los debates contemporáneos alrededor del naturalismo siguen teniendo a su centro los problemas clásicos de la filosofía.

por *cuáles* objetos matemáticos debemos aceptar en nuestra ontología – con cuales estamos *comprometidos* – está, a su vez, mediada por la pregunta de qué objetos habla la propia matemática. En este sentido, cuestiones tanto epistemológicas como semánticas están íntimamente involucradas en la discusión ontológica contemporánea al interior del naturalismo.

Finalmente, es importante recordar que la matemática misma incluye dentro de su *corpus* teórico muchos así-llamados *teoremas existenciales*, es decir, teoremas como "Existe un número infinito de números naturales" o "para toda ecuación algebraica de segundo orden existen dos soluciones entre los complejos", que (por lo menos a primera vista) afirman la existencia de objetos matemáticos. Es necesario, preguntarse, por lo tanto, si la pregunta ontológica de si existen o no estos objetos no es acaso redundante. Después de todo, la matemática misma nos dice qué objetos matemáticos existen, tal parece que el filósofo no puede decirnos más (o menos) al respecto. De esta manera, la cuestión sobre la naturaleza misma del quehacer filosófico y su relación con las ciencias (tanto naturales como matemáticas) alcanza especial realce en la discusión ontológica naturalizada contemporéanea.

De esta manera, el tema de la ontología naturalizada de las matemáticas se convierte en un excelente eje a través del cual introducirse a la nueva discusión sobre matemáticas en la filosofía contemporánea.

Por supuesto, sin embargo, no todos los temas, corrientes ni posiciones actuales en filosofía de las matemáticas se encuentran representados en la presente colección. Por principio de cuentas, racionalistas extremos como Jerrold Katz, neo-logicistas como Crispín Wright o estructuralistas como Stewart Shapiro o Michael Resnik no forman parte de la discusión ontológica dentro del marco naturalizado. Sin embargo, en la introducción he tratado de hacer justicia a esta exclusión señalando las relaciones críticas y de similaridad que se dan entres las posturas presentadas en la colección y las de estos y otros personajes importantes dentro de la discusión filosófica actual sobre las matemáticas.

II. Naturalismo Moderado y Exacerbado

> Contemporary American naturalism [is] in almost every major respect … mistaken. But it evidently appeals to the spirit of the times.
>
> P. M. S. Hacker (2006, 231)

En los artículos que componen esta colección, podemos identificar dos tipos de naturalismos en filosofía: Un naturalismo exacerbado y otro moderado. La primera noción de naturalismo la encontramos, por ejemplo, en el volumen editado por Steven Wagner y Richard Warner, *Naturalism, A Critical Appraisal* (1993). En su introducción, los editores escriben:

> We take naturalism to be the view that **only** natural science deserves full and unqualified credence. (Wagner y Warner 1993, 1. Énfasis mío)

Es también esta noción de naturalismo la que aparece en *The Oxford Companion to Philosophy* (1995), editado por Ted Honderich, donde *naturalismo* se define como

> . . . the view that everything is natural, i.e. that everything there is belongs to the world of nature, and so can be studied by the methods appropriate for studying that world. (Honderich 1995, 604)

Este naturalismo exacerbado se distingue por cuatro tesis radicales:

(1) Naturalismo (Ontológico): Todo es natural. No existen objetos ni sucesos fuera del ámbito de la naturaleza. Si, además, identificamos a la naturaleza

con el espacio de las causas, el materialismo se convierte en un *nominalismo* que rechaza la existencia de objetos abstractos (no-causales). Otros putativos tipos ontológicos que suelen ser blancos del afán naturalizador son los objetos mentales, sociales y sobre naturales.

(2) Positivismo o Cientismo[2] (Naturalismo Epistemológico): Las teorías de las ciencias naturales (definitivamente la física y, tal vez, la química y la biología)[3] contienen nuestra mejor (o única) descripción del mundo natural.

(3) Empirismo Extremo (Naturalismo Metodológico/Semántico): Los métodos de las ciencias naturales son los mejores (o los únicos) métodos confiables de conocimiento y representación de la naturaleza. Comúnmente ésta tesis se interpreta como implicando la imposibilida del conocimiento a priori.

(4) Anti-revisionismo (Naturalismo Filosófico): La tarea de la filosofía no debe ser el recomendar revisiones o correcciones a las prácticas o teorías científicas.[4]

La tesis (1), por supuesto, es demasiado vaga y solo adquiere sustancia en compañía de (2) o (3). Después de todo, qué sea un objeto o suceso natural depende, en última instancia, en lo que la ciencia natural nos diga al respecto (De Caro y Macarthur

[2]. De Caro y Macarthur (2004) prefieren usar el segundo término, pese a que reconocen que “the positivists were, in effect, the first fully fledged scientific naturalist movement” (2004, 8). De hecho, por ejemplo en el diccionario de Incola Abbagnano (1974), el positivismo (clásico, es decir, el de Saint-Simon, Comte, Mach, Stuart Mill y Spencer) se define de manera casi idéntica a cómo se ha definido el naturalismo contemporáneo. De hecho, Sin embargo, Fuller (2006) ha señalado claramente las profundas diferencias entre el naturalismo contemporáneo y el neo-positivismo de la primera mitad del siglo veinte. Veremos esta distinción en más detalle cuando revisemos el paso del neo-positivismo al naturalismo en Quine.

[3]. Cf. De Caro y Macarthur (2004, 4)

[4]. De Caro y Macarthur (2004, 3) agrupan las primeras tres tesis bajo el tema *ontológico* del naturalismo, en contraste con el tema *metodológico* que corresponde a mi tesis 4.

2004). Igualmente, la tesis (4) se sigue directamente de (2) y (3) bajo el supuesto de que la filosofía misma no es un de las ciencias naturales.[5] En cierto sentido, por lo tanto, la tesis anti-revisionista podría formularse de manera más precisa en la forma de un dilema: o bien la filosofía se reduce a (es decir, se transforma en las teorías y métodos de) la ciencia natural, o bien no puede recomendar revisiones o correcciones a las prácticas o teorías científicas de manera legítima.

De esta manera, podemos concebir a las tesis (2) y (3) como las tesis fundamentales del naturalismo, y a (1) y (4) como tesis derivadas. El naturalismo exacerbado es, pues, una combinación de positivismo y empirismo extremo. No es de sorprender, por lo tanto, que el naturalismo moderado se defina por suavizar las tesis fundamentales (2) y (3) de la siguiente manera:

(5) La Ciencia como Paradigma de Conocimiento (Naturalismo Epistemológico Moderado): Las teorías de las ciencias naturales son nuestro paradigma de conocimiento científico objetivo del mundo.

(6) El Método Científico como Paradigma (Naturalismo Metodológico Moderado): Los métodos de las ciencias naturales son nuestro paradigma de método confiables de conocimiento del mundo.[6]

En otras palabras, el naturalismo moderado se caracteriza por compartir con el naturalismo exacerbado las tesis de que (1) todo lo real es natural y que (4) la filosofía

---

5. Lo que significa, además, que (4) puede sostenerse independientemente de las otras tesis del naturalismo. Por lo tanto, uno bien puede aceptar el anti-revisionismo sin srompromterse con el naturalismo. Uno puede rechazar la vieja idea de la filosofía como árbitro y fundamentador de la ciencia, sino aceptar que la filosofía (o cualquier otra disciplina o práctica epistémica) debe reducirse a la ciencia natural. (De Caro y Macarthur 2004, 15).

6. De Caro y Macarthur (2004) sostienen una distinción similar entre variantes extremas y moderadas de naturalismo.

debe abstenerse de recomendar revisiones y enmiendas a la ciencia. Sin embargo, difiere de la vertiente exacerbada en rechazar la idea de que las teorías y métodos de la ciencia natural son los únicos cuerpos y métodos de conocimiento objetivo sobre la realidad. Lo que sí sostienen, sin embargo, es que sí son los únicos cuya confiabilidad y objetividad es *indudable*. Mientras que la ciencia natural no necesita *ya* demostrar su valor epistémico, el resto de nuestras disciplinas y prácticas epistémicas aun no han alcanzado tal nivel de privilegio. Por lo tanto, demandan de toda epistemología que respete, por lo menos, el carácter paradigmático de la ciencia natural. En la sección "¿Hay Conocimiento Matemático?", más adelante, veremos en más detalle las consecuencias de suavizar las tesis (2) y (3) del naturalismo. Por el momento, basta señalar que, así entendidas, (5) y (6) serían consistentes con la posibilidad de un conocimiento objetivo de la realidad que no pertenezca ni a las teorías de la ciencia natural, ni se apegue de manera estricta a los métodos de estas mismas ciencias. Tan solo exigen que cualquier conocimiento que se pretenda objetivo se integre al de la ciencia o se obtenga por métodos por lo menos tan confiables como los de la ciencia natural. (Warner y Winger, 2003, 12) Una vez abiertas las puertas a la posibilidad de otro conocimiento más allá del de la ciencia natural, la ontología también puede enriquecerse más allá de los objetos de la ciencia natural. A nivel ontológico, los naturalistas moderados aceptan como real no sólo aquellos objetos y sucesos de los que directamente trata la ciencia, sino también de aquellos cuyo estudio forma parte de nuestro conocimiento objetivo en apego con (5) y (6) (es decir, no sólo el de la ciencia natural, sino de todo conocimiento que se integre al conocimiento científico o cuya metodología sea por lo menos tan confiable como la de la ciencia natural).

En consecuencia, podemos decir que mientras que el naturalismo exacerbado es un tipo de reduccionismo, el naturalismo moderado es un tipo de integracionismo. Efectivamente, el Naturalismo Extremo trata de (1) reducir todo lo existente y real a lo natural, (2) todo conocimiento a la ciencia natural y (3) todo método de conocimiento al de las ciencias naturales. En contraste, el naturalismo moderado trata integrar nuestra visión filosófica de lo que es la realidad y el conocimiento que tenemos de ella a nuestro conocimiento científico.

Por supuesto, el que una posición sea reduccionista no es automáticamente un punto en su contra. Es necesario evaluar también si la base de la reducción es demasiado reducida (Wagner & Warner 2003, 4), es decir, si se pierde demasiado en la reducción. Por supuesto, qué signifique que algo sea demasiado estrecho' o que lo que se pierda sea demasiado es una pregunta que no se puede hacer en el aire, sino que necesita evaluarse en función del objetivo de dicha reducción. Es aquí dónde el naturalismo es poco explícito. Leyendo la amplia literatura naturalista es difícil encontrar una formulación clara, no de sus metas (la naturalización de todo conocimiento), sino su *objetivo*. ¿Para qué naturalizar? Tan solo cuando sepamos lo que podemos ganar al naturalizar todo conocimiento (especialmente el filosófico y el matemático) es que podemos determinar si la base de dicha naturalización es demasiado estrecha o si efectivamente se pierde demasiado en dicha reducción.

A lo más, lo que nos ofrece el naturalismo es una *motivación*. En este respecto, Wagner y Warner 92003, 10-11) han ofrecido un análisis crítico sucinto pero efectivo:

> Having argued that scientific objectivity is real, the naturalist will go on to propose that it is plainly a virtue of inquiry. Scientific discourse appears as an improvement on the confusion and cross purposes of other disciplines.

> Now add to this the demonstrated ability of science to correct opinions originated elsewhere – say, from philosophy or common sense. Then it becomes clear why one might elevate scientific rationality above other forms; why one might *hope* for an eventual scientific adjudication of all significant questions. This is the fundamental appeal of naturalism: an endorsement of epistemic order and progress. (Wagner y Warner, 2003, 10)

En otras palabras, la ciencia ha sido tan efectiva en producir conocimiento objetivo, que parece deseable el que todo nuestro conocimiento tuviera el mismo carácter objetivo. Sin embargo, como los mismos Wagner y Warner señalan, el indudable valor de la objetividad no basta para justificar un naturalismo. Como hemos señalado, el naturalismo contiene en su definición misma una cláusula exclusionaria. No solo afirma que el conocimiento científico es objetivo, sino que sólo el conocimiento científico merece ser reconocido como objetivo.[7] Sin embargo, es difícil argumentar por un monopolio de la objetividad del lado de la ciencia natural. Parece *prima facie* cierto que *ya* contamos con conocimiento objetivo fuera de las ciencias naturales. En el caso de las matemáticas, esto es muy claro. Ya no estamos en ninguna "crisis de los fundamentos" que requiera de una nueva fundamentación del conocimiento matemático. Tal parece que el tipo de justificaciones que garantizan objetividad no se limitan a aquellas que operan en la ciencia natural.

[7]. Además, también puede ser cuestionado el valor absoluto de la objetividad científica. Podemos, por ejemplo, sostener que podemos tener creencias justificadas no objetivas, o que, para ciertos objetivos, la objetividad no añade nada de valor a nuestras creencias. (Wagner y Warner 2003, 10).

También es común encontrar en la literatura epistemológica reciente caracterizada ala epistemología naturalizada como un rechazo a algunas de las dicotomías básicas de la epistemología fundacionista, como la distinción entre discursos normativo y descriptivo. Sin embargo, esta es una de las lecciones que la gran mayoría de los filósofos de la matemática simpatizantes del proyecto naaturalista aún no parecen haber aprendido. Por el contrario, pensadores como Burgess (1983), Maddy (1990, 1998a y 1998b) y Ernest (1988) han propuesto eliminar todo afán prescriptivo de la filosofía de las matemáticas.[8] Es difícil encontrar una mejor formulación de este impulso anti-normativo que en las palabras de David Lewis,

> I laugh to think how *presumptuous* it would be to reject mathematics for philosophical reasons. How would *you* like to go and tell the mathematicians that they must change their ways . . . ? Will you tell them, with a straight face, to follow philosophical argument wherever it leads? If they challenge your credentials, will you boast of philosophy's other great discoveries: That motion is impossible, . . . , that it is unthinkable that anything exists outside the mind, that time is unreal, that no theory has ever been made at all provable by evidence, . . . , that it is a wide-open scientific question whether anyone has even believed anything, . . . ? Not me! (Lewis 1993, 15)

Como McCarty (1993) bien ha señalado, los afanes de desacripción pura de son absurdos, en tanto el proyecto de un epistemología puramente descriptiva . . Neil Tennant (2000) también ha ya señalado lo imposible de una empresa filosófica puramente descriptiva, respecto a la ciencia. En respuesta al dictum de Maddy "[I]f, our philosophical account of mathematics comes into conflict with successful mathematical practice, it is the

[8]. De manera análoga, Muntersbjorn (2003) propone un naturalismo para la historia de las matemáticas: "The approach is advocated here is a kind of naturalism. In general, naturalism is charcaterized by its commitment to a descriptive, rather than normative, approach to intellectual history. . ." p. 164

philosophy that must give" (Maddy 1997, 161), Tennant replica: "But, it may be asked, is there such a thing as a philosophical neutral criterion of *successful* mathematical practice?" (Tennant 2000, 330)~~ En palabras de Shapiro (1997, 30), haciendo referencia a la expresión de Quine (1981, 72) la elección no es tan sencilla como elegir poner a la filosofía *al principio* o *al final* de las matemáticas.~~

Finalmente, un naturalismo que buscará acercarse a la práctica matemática tal y como ésta se da, de hecho, hoy en día, no podría aceptar una posición del tipo *philosophy last, if ever*. Como ha señalado Tennant (2000, 328), "Some mathematicians are very philosophically minded, and allow philosophical considerations to influence their choice of problems and methods." En otras palabras, si hemos de respetar la práctica matemática actual, no podemos hacernos a un lado y quedarnos quieto. Es necesario continuar nuestro diálogo mutuo.

En tanto el tema central del presente volumen es la discusión ontológica al interior del naturalismo, dedicaré gran parte de la presente introducción a revisar las otras dos dimensiones del naturalismo: su anti-revisionismo y sus planteamientos epistemológicos. Sin embargo, no quiero dejar la impresión de que estas cuestiones se encuentran ausentes en los textos de la colección. Por el contrario, las cuestiones epistemológicas y la pregunta por la relación entre ciencia (natural y matemática) y filosofía juegan un papel central en la discusión ontológica del naturalismo. Sin embargo, sí creo que es necesario dar una introducción más general a estos temas, una que vaya más allá de los ¬ímites de la discusión ontológica y conecte con cuestiones filosóficas más generales tanto la interiore como el exterior del naturalismo

III. Anti-Revisionismo y Naturalismo

Según la definición de la Real Academia Española, el revisionismo es una "Tendencia a someter a revisión metódica doctrinas, interpretaciones o prácticas establecidas con la pretensión de actualizarlas." Así definido, el revisionismo no parece tener ninguna connotación negativa, por el contrario, parece una tendencia no sólo favorable, sino necesaria para el desarrollo de toda disciplina o práctica. El diccionario de inglés *Mirriam Webster*, en contraste, no es tan benigno con su contraparte inglesa (la palabra *revisionism*), dando como una de su acepciones la más neutral "advocacy of revisión [alteration] (as of a doctrine or policy or in historical analysis)". En matemáticas, sin embargo, las cosas son muy distintas.

. . .

En por lo menos algún sentido, el problema del revisionismo es tan antiguo como la filosofía (de las matemáticas) misma. En su artículo sobre la filosofía de las matemáticas de Aristóteles en la *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2004), Henry Mendell señala entre las tareas básicas de toda filosofía de las matemáticas, tal y como es planteada por Aristóteles, el ser no-revisionista

> An account of mathematics should not impinge on mathematical practice so as to make it incoherent or impossible. If mathematicians talk about triangles, numbers, etc., the account of mathematical objects should at least explain the discourse. This is the problem of non-revisionism

> (sometimes also called naturalism). So Aristotle says (Met. xiii.3 1077b31-33) of his own account of mathematics that "it is unqualifiedly true to say of the mathematicals that thay [sic] exist and are such as they <the mathematicians say>. (cf. Phys. iii.7 207b27-34 for an application of the principle). (2004)

Sin embargo, en las últimas décadas, el debate revisionismo/naturalismo ha dominado la discusión filosófica matemática, de una manera que no lo hacía tal vez desde aquellos acalorados debates entre Brouwer y Hilbert a principios del siglo pasado. Uno de los peores epítetos que se pueda lanzar a un filósofo de las matemáticas hoy en día que el de 'revisionista.' Casi todo aquel que escribe hoy en día sobre este tema ha usado el epíteto, tanto para descalificar a sus adversarios, como para reforzar su posición. En (1997), por ejemplo, Penélope Maddy menciona entre los principios que guían su filosofía el de

> . . . if our account of mathematics comes into conflict with successful mathematical practice, it is the philosophy that must give. This is not, in itself, a philosophy of mathematics; rather, it is a position on the proper relations between the philosophy of mathematics and the practice of mathematics. Similar sentiments appear in the writings of the many philosophers of mathematics who hold that the goal of philosophy of mathematics is to account for mathematics as it is practiced, not to recommend reform. (Maddy 1997, 161).

Maddy localiza los orígenes de este anti-revisionismo en el pensamiento 'anti-filosófico' del segundo Wittgenstein (Maddy 1997, 162-171) y el 'naturalismo' de W. Quine, que consiste en "the recognition that it is within science itself, and not in some prior philosophy, that reality is to be identified and described" (Quine 1981, 21) Para Maddy, la matemática es parte de esa ciencia "fallible and corrigible, but not answerable to any supra-scientific tribunal" (Quine 1975, 72) de la que habla Quine.

Stewart Shapiro (1997, 7) cita el mismo pasaje de Quine para caracterizar lo que él llama el principio de *philosophy-last-if-at-all*, el cual se opone cardinalmente al principio de *philosophy-first,* según el cual "ontology and other philosophical matters determine the proper *practice* of mathematics" (Shapiro 1997, 6). Sin embargo, es importante notar que Shapiro rechaza *ambos* principios:

> One cannot "read off" the correct way to do mathematics from the true philosophy, nor can one 'read off" the true ontology, epistemology, or semantics from mathematics as practiced. (Shapiro 1997, 6) [9]

Un caso más radical que el de Maddy y Shapiro es Reuben Hersch, quien declara en las primeras líneas de su *What is Mathematics*, *Really?*: "Mathematics comes first, then philosophizing about it, not the other way around. . . I am defending our right to do mathematics as we do." (Hersch 1997, xi)

En el otro extremo – el moderado – del anti-revisionismo en filosofía de las matemáticas, David Corfield (2003) simplemente se lamenta de la casi-absoluta ignorancia de los filósofos respecto a lo que él llama la 'matemática real', es decir, la matemática que efectivamente hacen los matemáticos. En la introducción al ya mencionado libro, escribe:

> While there is a considerable amount of interest in the ways mathematicians have reasoned, this is principally the case for the nineteenth century and earlier and is usually designated as *history*. By far the larger part of activity in what goes by the name *philosophy of mathematics* is dead to what mathematicians think and have thought, aside from an unbalanced interest in the 'foundational' ideas of the 1880-1930

[9]. Para los efectos de esta nota, por otro lado, es claro que, al rechazar el principio del philosophy-first, Shapiro rechaza a la filosofía de las matemáticas revisionista.

> period, yielding too often a distorted picture of that time. (Corfield 2003, 5)[10]

Dentro de la filosofía de las matemáticas de habla hispana, Antonio Caba (1998) también es discreto respecto a su anti-revisionismo, escribiendo:

> Cuando se analiza gran parte de lo que hoy día se publica bajo el rótulo de Filosofía de las Matemáticas cuesta reconocer que constituya el resultado de filosofar de manera efectiva acerca de la matemática . . . porque la mayor parte de las cuestiones sólo de pasada conectan con la propia matemática, con el quehacer de los matemáticos. Es proverbial el rechazo que éstos han tenido desde siempre a todo lo filosófico. Pero creo que, en cierto modo, su actitud está justificada, puesto que la filosofía raras veces ha supuesto nada realmente positivo para su quehacer como matemáticos; aún peor, en ocasiones incluso se ha atrevido a dictar normas y a restringir el uso de herramientas a las que no estaban, como es obvio, dispuestos a renunciar. (Caba 1998, 293-4)

Rosen y Burgess, en la introducción a (1997) no van más lejos que señalar que, idealmente, una filosofía de la matemáticas, como toda filosofía de la ciencia, debe ser 'realista', no en el sentido filosófico del término, sino en el sentido cotidiano de estar basada en "the most up-to-date science. For a philosophical thesis should not be based on a scientific falsehood." (1997, 98-9) Sin embargo, como veremos más adelante, las conclusiones del mismo volumen sugieren un naturalismo más extremo, donde toda revisión a las matemáticas debe someterse a los estándares y criterios de la comunidad matemática real.

---

[10]. Corfield reconoce que Maddy (1997) trata un fragmento contemporáneo de las matemáticas, pero nota también que la teoría de conjuntos que ella estudia ahí sigue perteneciendo a la parte 'fundacional' y no el la corriente principal de las matemáticas (ibid.)

Se antojaría fácilmente argumentar – como parece hacerlo Maddy (1990) – que, por lo menos desde el punto de vista del *working mathematician*, el revisionista que propone restricciones siempre lleva la de perder, ya que el matemático siempre favorecerá aquellas propuestas que sean más permisivas, en vez de aquellas más restrictivas. El matemático prefiere más y más generales métodos de prueba y más laxas condiciones para la existencia de sus objetos de estudio. Sin embargo, es difícil encajara esta propuesta con la realidad histórica matemática. Más de una vez, los criterios de verdad y justificación que efectivamente han adoptado los matemáticos han sido más restrictivas, en vez de menos. Los criterios de rigor formal que aparecieron a finales del siglo XIX son un ejemplo claro. Actualmente, la mayoría de los matemáticos rechazan la validez de justificar tesis generales por inducción de casos particulares, pese a ser un criterio más laxo que el de prueba formal actualmente vigente. En otras palabras, la cuestión revisionismo/anti-revisionismo no puede reducirse ala simple cuestión entre restricciones/liberadores de la práctica matemática.

Sin embargo, es difícil encontrar en estos textos un análisis más profundo de qué exactamente es lo que hace a una filosofía de las matemáticas 'revisionista.' Notable excepción son los ya mencionados trabajos de Maddy (1997), y Burgess y Rosen (1997), quienes distinguen dos sentidos importantes en que una filosofía de las matemáticas podría (des)calificarse de revisionista: uno interno o 'matemático' y otro externo o 'metafísico'. A grandes rasgos, una filosofía de las matemáticas intenta una revisión interna de las matemáticas si busca establecer, transformar o rechazar criterios matemáticos de justificación y existencia, a partir de otros criterios y medios *matemáticos*. En contraste, una filosofía de las matemáticas es revisionista en el sentido externo o metafísico si, desde una posición filosófica externa a las matemáticas, no necesariamente filosófica, busca establecer, criticar, transformar o rechazar criterios matemáticos de justificación y existencia qua criterios de justificación y existencia *real*.

Diferentes filósofos se refieren a diferentes posiciones cuando hablan de 'revisionismo'. Para SILVIO PINTO EN SU RESPUESTA A MI, por ejemplo, el revisionismo externo no es realmente un revisionismo ya que no trata de cambiar o restringir directamente las prácticas matemáticas, sino que deja a los matemáticos hacer matemáticas 'como ellos quieren', es decir, según sus propios criterios. Ya que acepta los criterios matemáticos de existencia y justificación (qua criterios matemáticos), puede decirse que respeta las prácticas y verdades matemáticas, aunque (por lo menos algunas de ellas) no le parezcan *realmente* justificadas. No está interesado en revisar la práctica matemática, sino en interpretarla externamente. Desde cierto punto de vista metafísico, por ejemplo, ciertas verdades matemáticas pueden parecer no estar realmente justificadas. Sin embargo, no por ello dejan de ser matemáticamente verdaderas. Pero señalar esto no implica promover un cambio al interior de las matemáticas. En este sentido, su afán no es realmente revisionista, sino mas bien hermeneútico.

<u>Revolución e Interpretación</u>

Burguess y Rosen recuperan la distinción entre una 'reconstrucción' hermeneútica de una teoría y otra revisionista o revolucionaria de Putnam (1967). Para Burguess y Rose, la diferencia descansa en que

> [T]he hermenutic view [holds] that the reconstructed theory can be regarded as an analysis of what the original theory really meant all along (or vice versa), and the revolutionary view [holds] that the reconstructed

> theory is a distinct and better theory to be believed instead of the original (or vice versa.) (1997, 201)

Para Burguess y Rosen, pues, es importante distinguir entre una mera reinterpretación de los criterios matemáticos de justificación y existencia y una verdadera propuesta de revisión de los mismos. Una filosofía meramente hermeneútica, no es un revisionismo genuino. Por lo tanto, si un revisionismo externo no busca más que reinterpretar las prácticas matemáticas, sin intervenir en ellas, no es en realidad un revisionismo.

Para otros, sin embargo, independientemente de si el afán es hermeneútico o realmente revolucionario es adecuado llamar a ambos tipos de propuestas 'revisionistas', ya que rechazan los criterios matemáticos de justificación y existencia, *at face value*, que criterios reales. Dado que su punto de vista externo es considerado más fundamental que el punto de vista interno de las matemáticas, su rechazo no es más débil que el del revisionista interno sino, por el contrario, más fuerte. . .

Por otro lado, el revisionismo interno busca establecer, transformar o rechazar criterios matemáticos de justificación y existencia, poniendo atención exclusiva a datos provenientes de la matemática misma. Esto no significa, sin embargo, que crea o proponga que exista una especia de meta-criterio matemático que permita elegir entre criterios de justificación y existencia en competencia. Más bien, lo que sostiene es que la evaluación de las tendencias y el conocimiento matemático del momento debe ser suficiente para elegir un criterio u otro. El ejemplo más explícito al respecto es la propuesta de Penélope Maddy (1997) quien propone ciertos criterios de existencia para conjuntos a partir de analizar la historia reciente y el estado actual de la teoría de conjuntos. En ningún momento ofrece Maddy una prueba matemática de lo adecuado de su criterio de existencia.[11] Pero tampoco ofrece un argumento filosófico que a partir de consideraciones ontológicas genere el criterio de existencia real para las matemáticas.

Sin embargo, por ello tampoco debemos creer que el trabajo de Maddy no es filosófico, sino matemático (Aunque Marco Panza ha dicho que más bien es un libro de historia de las matemáticas). Efectivamente, hay argumentos filosóficos en la obra de Maddy. Sin embargo, dichos argumentos no sirven de sostén para las revisiones propuestas por Maddy para la teoría de conjuntos. Sino que sostienen su posición filosófica, precisamente. Toda la argumentación filosófica en (1997) está dirigida a defender su versión particular del naturalismo. La conclusión que Maddy saca de sus disquisiciones filosóficas no es otra sino que, a la hora de preguntarnos por la existencia y la justificación matemáticas, es mejor dejar a un lado a la filosofía. (Ahora sí, la filosofía en Maddy es una escalera que se debe dejar caer una vez que se ha llegado al naturalismo.)

Por principio de cuentas, es importante señalar que ambos tipos de revisionismos no son incompatibles, ni se implican mutuamente. Es posible ser revisionista externo y rechazar el revisionismo interno o, paralelamente, asumir una posición anti-metafísica al mismo tiempo que se busca una revisión interna de las matemáticas. La epistemología naturalizada que favorecen Burguess y Rosen en las conclusiones de su (1997), por ejemplo, rechaza el revisionismo-metafísico, pero no niega la posibilidad de un revisionismo interno, como queda claro en el siguiente pasaje:

[11]. Aunque a fin de cuentas sí permite que se pueda probar la existencia de nuevos conjuntos, ya que propone la aceptación de un nuevo axioma en la teoría. Pero esto no es sino consistente con el punto de vista revisionista interno ya que si el criterio actual de justificación es la prueba, el revisionismo interno debe adecuarse también a él.

> This is a question only for those who profess to adopt a naturalized rather than an alienated epistemology, and in particular for those [reconstructive nominalists] who profess to be proposing an **internal revolution** in science, not an external invasion of science by philosophy. The question if what non-, un-, or anti-scientific philosophical merits might be claimed [for a nominalistic reconstruction] from a standpoint prepared to appeal outside, above, and beyond scientific standard or merit to some supposed extra-, supra-, preter-scientific philosophical standars –to the Oracle of Philosophy or to occult faculties of 'philosophical intuition that cannot be justified by appeal to anything more fundamental'– will not concern us. (1997, 205. Énfasis añadido)[12]

El naturalismo que Maddy favorece en (1997), también, es un anti-revisionismo-metafísico abierto, sin embargo, al revisionismo interno. A este respecto, Maddy escribe:

> Opponents of naturalism sometimes complain that he naturalistic philosopher is reduced to recording the pronouncements of scientists, that such philosophy has no critical function, that it is reduced to mere sociology of science. But we've already seen that this is not true. Natural science itself is a self-critical enterprise that develops and debates its own methodological norms. **The naturalistic philosopher is free to join in this part of ongoing science, like anyone else, except that she cannot expect to use any peculiarly philosophical methods**. The only available methods are the scientific ones; for the naturalist, the evaluation and assessment of scientific methods must take place within science, using those very methods themselves. (1997, 181. Énfasis añadido)

[12]. Que Burguess y Rosen incluyen a la matemática dentro de su naturalismo (y, en este sentido, su naturalismo es más cercano al de Maddy que al de Quine) queda claro en la p. 206, cuando mencionan de manera explícita a las matemáticas y la física entre las ciencias a cuyos criterios de aceptabilidad debe someterse toda reconstrucción nominalista para ser consistente con una epistemología naturalizada.

Para Maddy, el filósofo no se encuentra en ninguna posición privilegiada externa desde la cual pueda juzgar el quehacer matemático (o científico en general). El filósofo es libre de proponer cambios o revisiones a los criterios matemáticos de verdad o justificación, siempre y cuando no lo haga *desde fuera* de las matemática, sino desde dentro, haciendo *más* matemática. Esta es la diferencia clave entre el revisionismo interno (o matemático) y el revisionismo externo (o metafísico).

Comúnmente, este segundo tipo de revisionismo (el externo) es el que parece más absurdo a los anti-revisionistas de camisas desgarradas. El acusado principal de tan horrendo crimen es J. L. Brouwer y sus neo-intuicionistas.[13] Durante décadas, la versión de libro de texto de la discusión sobre los Fundamentos de las Matemáticas en la primera mitad del siglo XX ha presentado a Brouwer y sus seguidores como ridículos 'castradores' de las matemáticas, filósofos lo suficientemente soberbios como para querer corregir siglos de matemáticas.[14] Sin embargo, hoy en día sabemos que las enmiendas propuestas por Brouwer no son tan radicales como se creía en aquellos días. (McCarty 1998).

Por otro lado, aún dejando a los intuicionistas y neo-intuicionistas de lado, es claro que si uno hace una lista más completa de aquellas posiciones filosóficas respecto a la matemática que más buscaron 'revisar' la matemática, encontrara ahí a algunos de los más importantes pensadores sobre la matemática de los últimos siglos. Frege, Russell y Hilbert, por ejemplo, no sólo buscaron renovar la matemática, revisando y corrigiendo los criterios matemáticos de existencia y justificación, sino que lo lograron y son

[13]. Aún filósofos de las matemáticas tan sofisticados como Stewart Shapiro (1997, 22) han caído en tal prejuicio.
[14]. Cf.,por ejemplo, Anglin (1994, 219).

precisamente estas ‘revisiones’ las que se consideran entre sus mayores legados. En gran parte, es gracias a su ‘revisionismo’ que su influencia sobre el desarrollo de la matemática ‘normal’ se ha vuelto indudable.

Por supuesto, es posible replicar que dichas ‘revisiones’ no fueron metafísicas, sino internas, ya que fueron hechas por estos personajes qua-matemáticos, en vez de qua-filósofos. Sin embargo, tal respuesta sería una obvia petición de principio por parte del anti-metafísico. En una clásica visión histórica de los vencedores, los filósofos de las matemáticas serían presentados como ‘matemáticos’ cuando sus propuestas son exitosas, y como ‘revisionistas metafísicos’ cuando no lo son.

Sería necesario, pues, contar con un criterio que nos permita decidir cuándo la argumentación a favor o en contra de revisar los criterios de existencia y justificación en matemáticas es ella misma matemática y cuando filosófica o metafísica. Sólo así podemos dar sentido a la distinción de Maddy, Burgess y Rosen. Esto queda claro en el pasaje antes citado de Penelope Maddy (1997, 181), donde se apela a “peculiarly philosophical methods” para distinguir un revisionismo aceptable (el interno a las matemáticas) de uno inaceptable (el externo, desde la filosofía).

Maddy reconoce esto y por ello, en la formulación de su naturalismo (es decir, un positivismo abierto al revisionismo interno) apela a la vieja discusión sobre la distinción entre preguntas internas y preguntas externas, propuesta por Carnap y fuertemente criticada por Quine. Para saber si la actitud de un filósofo de las matemáticas corresponde a un revisionismo interno o externo, es necesario poder distinguir si la propuesta revisión se hace desde dentro de las matemáticas o desde una posición filosófica externa. Y este no es otro sino el problema de distinguir cuando una tesis o pregunta es interna o externa a las matemáticas.

En este respecto, Maddy reconoce que para sostener la división entre revisionismo interno y externo es necesario recuperar la vieja distinción entre preguntas internas y externas (además de las distinciones entre conocimiento a-priori y a-posteriori, y enunciados analíticos y sintéticos). Es necesario, por lo tanto, rechazar la propuesta holista de Quine, la cual, para Maddy, también peca de revisionismo externo (1997, 107). Para Maddy, el naturalismo Quineano tan sólo sustituye los criterios y métodos filosóficos externos, por los de las ciencias naturales, los cuales, en última instancia, son tan ajenos a la práctica matemática real como los primeros. En su lugar, Maddy propone extender el naturalismo más allá de las ciencias naturales, hasta el campo de las matemáticas. La propuesta de Maddy es negar a la ciencia natural el lugar privilegiado que el positivismo había negado ya a la filosofía. Para ella, es inválido tratar de revisar los criterios de existencia y justificación de las matemáticas no sólo desde una posición filosófica externa, sino también desde una posición *científica* (*natural*) externa.

Esto pone a Maddy en una posición particularmente difícil. Quiere que la matemática sea considerada tan científica como para merecer el mismo tipo de autonomía epistémica, pero no tan científica como para requerir el mismo tipo de justificación. Esto la hace blanco de críticas tanto de parte de naturalistas (quienes criticarían la autonomía que le otorga a la matemática y su consecuente a-priorismo), como de positivistas (quienes cuestionarían el carácter científico de la matemática).

En (1997, 203), Maddy misma reconoce el riesgo de que su anti-revisionismo-metafísico se convirtiera en un relativismo tan radical que alguien pudiera 'robarse' el argumento para proponer un 'naturalismo astrológico' según el cual los criterios de justificación y existencia internos a esta disciplina – la astrología – no pudieran ser revisados por ningún criterio científico ni filosófico externo. Si los criterios de existencia y justificación de las matemáticas no requieren mayor justificación que la que se da al interior de la práctica matemática, ¿por qué no podemos decir lo mismo de la práctica astrológica, o cualquier otra disciplina cuyo estatus científico sea, en principio, cuestionable? Según Dieterle (1999), Tennant (2000) y otros, el quietismo de Maddy no responde de manera satisfactoria al reto del naturalismo astrológico, precisamente por abandonar el naturalismo Quineano y convertirlo en un a-priorismo. Efectivamente, por no naturalizar las matemáticas, sino dejarlas como están, Maddy ha abandonado la empresa filosófica de justificación de la disciplina matemática. El lado oscuro del anti-revisionismo-metafísico es precisamente la pérdida de una justificación externa que permita ver al no-matemático por qué la las verdades matemáticas son efectivamente verdaderas y no simplemente verdaderas-para-los-matemáticos.

En este punto, el naturalismo de Penelope Maddy no ha sido la única filósofa de las matemáticas que ha tenido que pagar el alto precio de rechazar la posibilidad de un revisionismo metafísico. Tanto los nominalistas contemporáneos, como los Neo-fregeanos de la escuela de St. Andrews han adoptado una posición en la cual no es posible dar una justificación externa a los criterios de existencia y justificación de las matemáticas. Los nominalistas sí aceptan la necesidad de justificaciones externas para los criterios matemáticos. (Después de todo, aceptan la validez del argumento Quineano de Indispensabilidad, aunque no su corrección, ya que creen que una de sus premisas – la indispensabilidad de las matemáticas, precisamente – es falsa), pero no creen que dicha justificación sea posible. Mas bien, desde este punto de vista externo, los objetos matemáticos no existen y , por lo tanto, la mayoría de sus afirmaciones no están realmente justificadas. En contraste, los neo-fregeanos sí apelan a criterios externos para justificar el carácter lógico del principio de Hume. Sin embargo, sus conclusiones al respecto son totalmente opuestas. Para los nominalistas, esto significa que los objetos matemáticos no existen *realmente* y que las verdades matemáticas que dependen de su existencia no están *realmente* justificadas. Para los Neo-fregeanos, al contrario, esto significa que no se puede demostrar que *no existen realmente*, ni que *no estén realmente justificadas* sus verdades y, por lo tanto, vale decir que *sí* existen y están justificadas en el único sentido en que esto puede decirse, es decir, se pueden demostrar desde el interior de las matemáticas. Antes de admitir objetos y verdades astrológicas, el nominalista, prefiere 'tirar al niño con todo y el agua' y eliminar a las verdades y los objetos matemáticos a la par. Por ello, Burgess y Rosen acertadamente notan que la mayoría de las críticas al nominalismo provienen de la observación de que

> . . . nominalists are denying that certain entities 'really' exist, or that the belief that they do is 'really' justified by ordinary commonsense and scientific and mathematical standards of justification. (Burgess y Rosen 1997, 31)

Una crítica similar a la posición anti-metafísica de la escuela de St. Andrews ha sido propuesta recientemente por Agustín Rayo (2003), quien, además de abogar por un tipo de naturalismo Quineano, crítica los criterios internos de existencia propuestos por Crispin Wright por estar basados en estipulaciones cuyo éxito se asume 'por defecto':

> I argue that Neo-Fregean accounts of arithmetical truth and arithmetical knowledge tacitly rely on a thesis I call *Success by Default* –the thesis that, in the absence of reasons to the contrary, we are justified in thinking that certain stipulations are successful. Since Neo-Fregeans have yet to supply an adequate defence of *Success by Default*, I conclude that there is an important gap in Neo-Fregean accounts of arithmetical truth and knowledge. (Rayo 2003, 3)

Otra vez, la cuestión es si podemos atenernos solamente a criterios internos de existencia y justificación, o si las preguntas fundamentales de la filosofía de las matemáticas son *cuestiones externas*.

Como puede verse, tanto nominalistas como neo-fregeanos son susceptibles a problemas similares al de Maddy. En vez de un naturalista astrológico, es fácil imaginar un nominalista y un Neo-fregeano astrológico. El nominalista astrológico podría argüir que si las verdades de las matemáticas son tan falsas (o como Field ha sostenido en discusiones recientes con Crispín Wright, carecen de valor de verdad) como las de la astrología, y las matemáticas no aplicadas están tan separadas de la red científica de creencias como la astrología, no es posible distinguir a una como ciencia, y la otra como charlatanería. Por lo tanto, el conocimiento que nos da una parecería tan válido como el de la otra. Igualmente, mientras el Neo-fregeano no nos explica la diferencia entre la estipulación de objetos matemáticos, y la estipulación de influencias astrológicas, tampoco puede dar razón de las diferencias de válidez entre ambas disciplinas. Antes de querer tirar la escalera metafísica es necesario haber subido por ella. Sin embargo, nominalistas, Neo-fregeanos y naturalistas a la Maddy quieren hacer un lado a la metafísica sin haber respondido a las preguntas que ella nos planteaba. En palabras de

Wagner y Warner (????, 4), el naturalismo mismo no es una posición científica, sino filosófica y como tal es que debe ser juzgada.[15]

V. ¿Hay conocimiento matemático?

A simple vista, la respuesta a la cuestión que abre esta sección parecería obvia. Sin embargo, por sorprendente que parezca, una gran parte de la literatura en filosofía de las matemáticas de los últimas décadas se ha dedicado a mostrar que esto no es así. Tal y como indicaba en la sección anterior, los argumentos más fuertes a favor del realismo en matemáticas – incluyendo el famoso 'argumento de indispensabilidad' de Quine – son argumentos a la mejor explicación que parten de la existencia del conocimiento matemático. En otras palabras, los realistas apelan a la existencia de objetos matemáticos como parte de nuestra mejor explicación del conocimiento matemático. Por lo tanto, no es de sorprender que muchos anti-realistas – incluyendo loas anti-realistas naturalistas – se hayan lanzado a la empresa de demostrar la imposibilidad del conocimiento matemático.

En esta sección analizo la viabilidad del argumento principal de los naturalistas anti-realistas contra el conocimiento matemático: su propia versión del argumento epistemológico de Benacerraff. Para los naturalistas, este argumento establece que es imposible tener conocimiento de objetos abstractos y por lo tanto, no es necesario aceptarlos en nuestra ontología. Sin embargo, mostraré como el argumento explota una ambigüedad en lo que se debe esperar de una epistemología naturalista y qué, una vez

[15]. Este artículo surgió como resultado de las discusiones del Seminario de Filosofía de las Matemáticas organizado por Javier Elizondo y que tengo la suerte de compartir con Silvio Pinto, Max Fernández de Castro. Este texto en particular, tiene su orígen en las discusiones que aparecieron publicadas en la revista *Signos Filosóficos* . . . Una versión preliminar también fue presentada en el XXXVII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana en 2004.

que reconocemos dicha ambigüedad, el argumento es incompatible con el propio naturalismo. Para finalizar, identifico un error común detrás de muchas interpretaciones del papel de la ciencia natural al interior del naturalismo y cómo mucho del trabajo reciente de Penelope Maddy debe entenderse precisamente como señalando dicho error. Dicho error es confundir el carácter paradigmático de la ciencia natural como conocimiento objetivo con su carácter exhaustivo.

1. Los Compromisos Epistemológicos del Naturalismo

Además de su dimensión ontológica, el naturalismo tiene también ciertos compromisos epistemológicos. Leyendo los textos de nuestra bibliografía, dos compromisos fundamentales emergen claramente: (1) El Carácter Paradigmatico de la Ciencia Natural y (2) El Conocimiento como Fenómeno Natural. Ambos compromisos restringen lo que es aceptable dentro de una epistemología consistente con dichos principios. Bajo el primer compromiso, cualquier explicación naturalista del conocimiento debe incluir, por lo menos, la totalidad del conocimiento científico actual sobre la naturaleza. El segundo compromiso restringe las posibles epistemologías naturalistas a aquellas que presentan al conocimiento como un proceso natural. Este segundo principio prohíbe apelar a procesos o capacidades supra-naturales (como, presuntamente lo sería la intuición directa de objetos abstractos) para explicar el conocimiento. Es bajo estos dos principios básicos que la discusión sobre la posibilidad misma del conocimiento matemático se discute al interior del naturalismo. El (segundo) reto epistemológico del filósofo naturalista de las matemáticas es dar sentido al conocimiento matemático dentro de las dos restricciones anteriores, o rechazarlo. En este texto nos centraremos en aquellos filósofos naturalistas que optan por la segunda salida: rechazar el conocimiento matemático por incompatible con los compromisos epistemológicos del naturalismo.

2. El Argumento Epistemológico de Benacerraf

Originalmente, el argumento epistemológico de Benacerraf fue planteado en términos de una teoría causal del conocimiento. Brevemente, una teoría causal del conocimiento establece que para tener conocimiento objetivo de un estado de cosas o tipo de objetos dado, debemos, por lo menos, tener algún tipo de interacción causal con dichos objetos o estados de cosas. De esta manera, el argumento de Benacerraf establece que, dado que los objetos abstractos no pueden entrar en relación causal con nosotros, nos es imposible conocerlos. Todo conocimiento de objetos abstractos, incluido el matemático, es imposible.

Tal y como señalan Burgess y Rosen (1997), en las últimas décadas, la hipótesis causal del conocimiento ha caído en desprestigio dentro de la epistemología y la tan esperada explicación causal del conocimiento aún no se ha dado. Aun más, también es importante recalcar que, originalmente (Goldman 1967), la hipótesis causal fue propuesta exclusivamente para explicar el conocimiento empírico. Sin embargo, esto no ha detenido a muchos anti-realistas naturalistas a aferrarse al argumento de Benacerraf como arma en contra del platonismo matemático. Para ello, los naturalistas hacen derivar la hipótesis causal del compromiso (2) arriba mencionado. Efectivamente, basta (3) equiparar 'proceso natural' con 'proceso natural' (identificar el espacio lógico de la naturaleza con el espacio lógico de las causas, para usar términos de MacDowell) para obtener la hipótesis causal del argumento original de Benacerraf del compromiso (2) de los naturalistas.

Sin embargo, el argumento de Benacerraf requiere, además de la hipótesis causal del conocimiento, una segunda premisa fuerte: la hipótesis externalista (4):

(4) Para que un agente *s* esté autorizado para tener una creencia *p* sobre un estado de cosas *e*, es necesario que dicho estado de cosas *e* juegue un papel significiativo en la formación de la creencia *p* en *s* o en la autorización epistémica que *s* tenga para creer *p*.

Una vez que aceptamos, además del compromiso naturalista (2), la equivalencia (3) y la hipótesis externalista (4), el argumento epistemológico de Benacerraf efectivamente establece la imposibilidad de formar creencias autorizadas sobre objetos abstractos (incluso los putativos objetos matemáticos).[16]

3. Externalismo y Necesidad

Antes de cuestionar el argumento epistemológico y sus presupuestos, vale la pena argumentar un poco a favor de la plausibilidad de la hipótesis externalista (4). La motivación detrás de la hipótesis externalista (4) es la aparentemente más básica presuposición de que para que un agente *s* esté autorizado para tener una creencia *p* sobre un estado de cosas *e*, es necesario que dicha creencia (y su presunta autorización) sea *sensible* a la verdad de *p*, es decir, que el proceso de formación de la creencia *p* en *s* o en el de su supuesta autorización epistémica no haya podido permanecer inalterado en el

[16]. Además de (2), (3) y (4), el argumento epistemológico depende de otras tesis controversiales sobe la matemática. En especial, depende de la tesis semántica (5) de que los enunciados matemáticos tratan sobre ciertos objetos matemáticos, sus propiedades y relaciones internas, la tesis ontológica (6) de que la verdad de dichos enunciados depende de la existencia de dichos objetos y (7) la tesis metafísica de que los objetos matemáticos, en tanto objetos abstractos, son causalmente inertes. La tesis semántica (5) es comúnmente justificada por el desideratum de contar con una semántica uniforme para el lenguaje matemático y el no-matemático. Pese a que (5), (6) y (7) son tesis controversiales, las daremos por asumidas por ser tesis generalmente compartidas por los platonistas en contra de los cuales se presenta el argumento epistemológico.

caso de que *p* fuera falsa. En otras palabras, sea *G* una descripción adecuadamente general del proceso de formación de la creencia *p* en *s* y de su putativa autorización para sostenerla; para que *s* esté autorizado para creer *p*, *G* debe, por lo menos, implicar por defecto a *p*[17]. De otra manera, aunque *p* fuera verdadera, sería posible que *s* creyera *p* de manera accidental.

Tomemos un ejemplo. Supongamos dos agentes *a1* y *a2*, ambos de los cuales están convencidos en su creencia de que el 12 de Enero de 2004 hubo un intento de asesinato al presidente de la República. El primero de ellos llego a su creencia tras leer la noticia en el periódico, mientras que el segundo formo su creencia tras leer los residuos de café en su taza algunos días después. Estamos inclinados a decir que mientras que *a1* efectivamente está epistémicamente autorizado a creer que el 12 de Enero de 2004 hubo un intento de asesinato al presidente de la República, el segundo tan solo tiene una afortunada creencia verdadera. Presumiblemente, una razón por la cual hacemos la distinción es que, de no haber habido un intento de asesinato al presidente en esa fecha, el periódico no habría publicado tal noticia y, sin embargo, es más probable que las manchas al fondo del café de *a2* hayan sido las mismas. Estas dos inferencias se dan por defecto por que, aun cuando es posible que el periódico publicará una historia falsa, o las manchas del café hubieran cambiado en dicho caso, en ausencia de una explicación de estos casos extraordinarios, es más razonable concluir que el proceso involucrado en la

[17]. No es necesario que la implique necesariamente ya que, de otra manera, la satisfacción de la condición de sensibilidad sería suficiente para garantizar verdad. Lo que se busca es apenas una condición mínima para hablar de autorización epistémica. La autorización epistémica, a diferencia de otras concepciones más fuertes de justificación epistémica ,es falible.

formación de la creencia de *a1* se vería afectado sustancialmente por este hecho (mas bien, por la ausencia del hecho relevante) y el de *a2* no.

Llamemos a ésta, la hipótesis de la *sensibilidad a la verdad*. Varios autores (Katz ¿???, Bonjour ¿????, Field 1989, Dummett 1991) han señalado que, así formulada, la hipótesis es epistemológicamente vacua para el caso de las matemáticas (y de las verdades necesarias en general), ya que si *p* es necesaria, se sigue de cualquier conjunto de proposiciones[18] y, por los tanto, se sigue de *G* de manera vacua. De ahí que la hipótesis de la sensibilidad a la verdad no puede jugar ningún papel sustancial en el argumento epistemológico. Es por esta razón que Field (1989) ha propuesto fortalecer la tesis de la sensibilidad para requerir que nuestras creencias y autorizaciones epistémicas sean sensibles a su *contenido particular,* en vez de solamente su verdad. Nuestra creencia de que *3+4=7*, y la autorización epistémica que tengamos para creerla, debe ser sensible a que *3+4* efectivamente sea *7*, en vez de que *a*+b sea equivalente a *b+a,* aun cuando ambas ecuaciones sean verdaderas en los mismos mundos posibles (a saber, todos). De ahí que sea necesario formular el argumento, de manera más fuerte, apelando a la hipótesis externalista (4) en vez de la hipótesis de la sensibilidad a la verdad. También es por eso necesario que (4) sea formulado en términos de un vago 'papel significativo' en vez de alguna relación lógica entre *p* y el proceso a través del cual el sujeto *s* adquiere su creencia y presunta autorización epistémica.

4. Por qué el Argumento de Benacerraf es incompatible con el Naturalismo

Tal y como establecimos en la sección anterior, la versión naturalista del argumento de Benacerraf depende, no solamente del compromiso (2), sino también de las hipótesis (3)

[18]. No solamente por defecto, sino lógicamente.

y (4). Además, también señalamos que el naturalista debe comprometerse, no sólo con la restricción epistemológica (2), sino también con (1). Después de todo, ¿de qué otra manera puede establecerse qué es un *proceso natural*, sino apelando a nuestro conocimiento científico sobre la naturaleza? Sin embargo, (1) es incompatible con (3) y (4), es decir, es imposible ofrecer una teoría epistemológica del conocimiento natural que obedezca a (3) y (4) y, además, respete (1), es decir, sea capaz de contener a todo nuestro conocimiento matemático. Por lo tanto, el epistemólogo naturalista debe rechazar (3) la identificación de 'lo natural' con 'lo causal' o (4) la hipótesis externalista de que los objetos acerca de los cuales tenemos conocimiento deben participar de manera significativa en nuestra adquisición de dicho conocimiento. De cualquier manera, el naturalista no puede aceptar todas las premisas necesarias para el argumento de Benacerraf y, por lo tanto, no puede usar dicho argumento en contra del platonista.

El argumento más famoso a favor de la incompatibilidad entre (1), (3) y (4) es, por supuesto, el argumento de indispensabilidad de Quine. Si Quine tiene razón, nuestro conocimiento científico natural ya incluye (por lo menos parte de las) matemáticas. Sin embargo, aún si el argumento de Quine fallara (por ejemplo, si efectivamente fuera posible nominalizar la ciencia natural actual), hay otras razones para rechazar la identidad (3) de lo natural – entendido como aquello de lo que nos da conocimiento la ciencia natural actual – con lo causal. A partir del seminal trabajo de John Beatty (1994), se reconoce que la mejor manera de entender muchos (si no todos los) procesos eminentemente biológicos no es como procesos causales.[19] Aún si el naturalista quisiera comprometerse con un fisicalismo, rechazando también el conocimiento biológico como

[19]. De manera más reciente, Beatty ha sostenido que la ecología claramente no trata de procesos causales.

ciencia natural (!), recientemente James Robert Brown (a aparecer) ha señalado que la física cuántica tampoco es compatible con (3) y (4), ya que – debido al fenómeno de paridad – de hecho podemos tener conocimiento sobre objetos físicos sin relacionarnos causalmente con ellos.

Además de las razones anteriores, por supuesto, debe mencionarse también la vasta literatura anti-externalista en epistemología contemporánea[20]. Pese a que el debate internalistas *vs* externalistas no ha arrojado un vencedor claro, por lo menos nos da muchas razones para poner a la hipótesis (4) en duda. De cualquier manera, el naturalista no puede adaptar el argumento epistemológico de Benacerraf como un argumento *naturalista* contra el conocimiento y la existencia de objetos matemáticos.[21]

En general, muchas críticas al naturalismo han seguido una estrategia similar a la anterior. Las críticas al naturalismo en general se concentran en tres problemas (Wagner y Werner 2003, 19):

1. Presupuestos fundamentales asumidos por los naturalistas sobre la ciencia no corresponden de hecho con cómo ésta se practica. En otras palabras, la ciencia natural no se hace cómo los naturalistas creen (Wilson, Bedau, Brown. Maddy).

[20]. A excepción del reciente trabajo (2004), la discusión se ha dado fuera del ámbito de la epistemología de las matemáticas.
[21]. Sin embargo, es importante distinguir el argumento epistemológico de Benacerraf como *objeción* al platonismo del *reto epistemológico* asociado a dicho argumento. En otras palabras, aún cuando el naturalista no haya demostrado que el conocimiento de objetos matemáticos es imposible, el reto de explicar la posibilidad de dicho conocimiento queda en pie.

2. El naturalismo es inconsistente con sí mismo. Sus afirmaciones no son naturalistamente aceptables (Bealer, Foley, Myro, Wagner)
3. El naturalismo es inconsistente con otras cosas en las que claramente estamos justificados en creer (Baker, Bealer, Bedau, Foley, Warner).

5. Penenlope Maddy y un Error Común entre los Epistemológos Naturalistas

El error básico que cometen los anti-realistas naturalistas que apelan al argumento de Benacerraf es malinterpretar (1) el carácter paradigmático de la ciencia natural. Como todo paradigma, la ciencia natural es un ejemplo claro de conocimiento científico objetivo [22], pero no el único. De ahí que el compromiso con (1) por parte del naturalista no la comprometa con el rechazo a todo conocimiento de otro tipo. Gran parte del trabajo reciente de Penélope Maddy (1997, 1998 y 2001) (los textos que hemos estudiado en este seminario), ha sido dedicado a señalar este error común.

Como se puede ver al leer las críticas de Neil Tennant (2000) y J. M. Dieterle (1999), incluídas en este volúmen, comúnmente se ha acusado a Maddy de ofrecer un naturalismo no-naturalista, en tanto que acepta otro tipo de conocimiento científico aparte del de las ciencias naturales. Sin embargo, el error de Tennant y Dieterle es confundir el carácter paradigmático de la ciencia natural con su carácter *exhaustivo*. El epistemólogo naturalista, al comprometerse con (1) no se compromete a rechazar todo tipo de conocimiento que no sea el de las ciencias naturales. A lo único que se compromete es a

[22]. En este texto los consideraré como sinónimos. Después de todo, es el carácter objetivo de la ciencia del que se desprenden sus compromisos ontológicos, que son los que importan en el debate entre realistas y anti-realistas que aquí nos ocupa.

aceptar la Ciencia Natural como conocimiento objetivo del mundo y a rechazar toda teoría epistemológica que no respete este compromiso. Esto no significa rechazar toda teoría que incluya, en su concepción de la ciencia, algo más que la ciencia natural, sino a rechazar toda teoría que incluya *menos* que la totalidad de la ciencia natural. Es por eso que el naturalista debe rechazar cualquier teoría causal-externalista del tipo que presupone el argumento de Benacerraf. No porque es demasiado amplia, sino porque es demasiado restrictiva, en tanto que excluye por lo menos parte de nuestro conocimiento científico sobre la naturaleza.

Es importante, por lo tanto, no confundir un caso paradigmático – como el de la ciencia natural – con un caso exhaustivo. Aceptar un caso paradigmático de ciencia no implica rechazar todo otro tipo de ciencia. Para juzgar si cierto conocimiento – o candidato a conocimiento – es científico no basta preguntarse si *forma parte* de las ciencias naturales. Es necesario juzgar si dicho candidato a conocimiento es *tan científico* como el de las ciencias naturales. Así es como funcionan los paradigmas[23], y es esto es algo que cualquier teórico de conceptos debe saber. Considérese el tan famoso ejemplo del *pájaro* como paradigma del concepto *ave*. El que el pájaro sea nuestro caso paradigmático de ave no significa que pensemos que todas las aves son pájaros. Por supuesto que hay aves que no son pájaros y ello no invalida nuestro uso del pájaro como paradigma de ave. Lo mismo sucede en el caso de la ciencia. Nuestro compromiso con la ciencia natural como paradigma de conocimiento objetivo no excluye la posibilidad de otro tipo de conocimiento científico.

[23]. Uso aquí el concepto de ‘paradigma’ en su sentido de caso paradigmatico.

Cuando se trabaja con paradigmas, por lo tanto, para juzgar si algo cae o no bajo el concepto de cuestión no es suficiente determinar si el candidato es distinto del caso paradigmático o no. Aún en el caso que sea diferente, es necesario determinar si tal diferencia es *relevante* para el concepto en cuestión. Aun cuando un pingüino sea muy diferente de un pájaro, las diferencias no son suficientemente s para concluir que el pingüino no es un ave. En el caso de la ciencia, no es suficiente decir que el conocimiento matemático es radicalmente distinto del conocimiento de las ciencias naturales. Es necesario determinar también si las diferencias entre ciencia natural y matemática son lo epistemológicamente relevantes como para rechazar a esta última como conocimiento objetivo. Este es el error implícito en la crítica de Tennat y Dieterle al naturalismo de Maddy.[24] Mas en particular, dicho error consiste en tomar la diferencia en objeto de estudio (*subject matter*) entre la ciencia natural y la matemática como suficiente para establecer una diferencia epistemológica fuerte. El que la ciencia natural se dedique al estudio de unos objetos y la matemática a otros no parece ser razón suficiente para decidir si un tipo de conocimiento es objetivo y el otro no. Mucho menos si, como Brown y Quine han argüido, hay intersección entre ambos grupos de objetos. Para que la crítica de Tennant fuera válida, debería ofrecerse un argumento a favor del significado epistemológico del objeto de estudio para la posibilidad de obtener conocimiento científico de él. Esto es precisamente lo que intentaba lograr el argumento de Benacerraf, pero como hemos visto falla.

[24]. A decir verdad, para ser justos, deberíamos de hablar de *una* de las críticas de Tennat y Dieterle a Maddy. Como vimos en el seminario, ambos autores hacen varias otras críticas y de ellas, la crítica de que el de Maddy es un naturalismo sin naturaleza es tan solo una de las más débiles.

El trabajo de Maddy, por lo tanto, debe entenderse como un intento de demostrar que las múltiples diferencias entre el quehacer matemático y el de los científicos naturales – especialmente el de tener objetos de estudio diferentes – no es epistemológicamente relevante para juzgar si un conocimiento es científico o no.

6. Conclusiones

Hemos visto dos intentos de extraer de los compromisos epistemológicos básicos del naturalismo – el carácter paradigmático de la ciencia natural y el conocimiento como fenómeno natural – un argumento en contra del conocimiento matemático. En primer lugar, el argumento epistemológico de Benacerraf trata de establecer cómo ningún proceso natural – entendido éste como un proceso causal – puede producir conocimiento de objetos abstractos. . .

Como han escrito Wagner y Warner (????, 4), refiriéndose a las diferentes empresas de naturalización en filosofía, “nothing is as encouraging as success and its absence breeds doubt”. De ahí que sea fgundamental analizar no sola la coherencia general del proyecto naturalista en matemáticas, son también las diferentes propuestas particulares contemprráneas y sus logros y fracasos. De ahí la importancia de una colección como ésta: . . .

VII. Maddy y el Quietismo Matemático

Si a alguna filósofa contemporánea le debemos en mayor grado la integración del naturalismo a la discusión filosófica en matemáticas, ésta sin duda sería Penelope Maddy. Es pertinente, por lo tanto, empezar nuestra reflexión sobre el resurgimiento contemporáneo del naturalismo en la filosofía de las matemáticas con ella. En la tercera parte de su *Naturalism in Mathematics* (Maddy 1998), Maddy trata de extender el naturalismo esbozado por Quine en su seminal *Theories and Things* (1981) de las ciencias naturales a las matemáticas. Es por esto que Neil Tennant (2000), por ejemplo, piensa que el naturalismo de Maddy no es tal. Efectivamente, el de Maddy es un naturalismo *mas allá de lo natural*. Al extender el naturalismo fuera del ámbito de lo estrictamente natural, el de Maddy debería llamarse tal vez, para continuar con el paralelismo, un *matematismo* en matemáticas. Así como para Quine, la ciencia sólo debe responder a sus propios criterios de justificación, de manera que no se le deba obligar a conformarse a ningunos preceptos filosóficos ajenos a ella misma; así también las matemáticas, en palabras de Maddy, no tienen por qué "responder a tribunal extra-matemático alguno, ni requieren mayor justificación que la prueba y el método axiomático."[25] A este naturalismo, Maddy lo ha llamado también *modestia filosófica*, aunque siguiendo a Adam Rieger (2002, 250), me parece más correcto llamarlo de *inmunidad matemática*. Si hemos de proponer nuevos nombres, yo sugeriría lo llamaralo "Conservadurismo Matemático", en tanto su objetivo es separar los prejuicios filosóficos de los verdaderos argumentos matemáticos.

[25] Mathematics is "not answerable to any extra-mathematical tribunal and not in need of any justification beyond proof and the axiomatic method." Maddy (1998b) 184

Este naturalismo se distingue de otras maneras de tratar de extender la tesis de Quine del terreno de las ciencias naturales al de las formales. En particular se distingue de lo que aquí he llamado *naturalismo exacerbado* corresponde a la corriente mas radical de naturalismo.

Críticas al Naturalismo de Penelope Maddy

Axel Arturo Barceló Aspeitia

Octubre 13, 2005

A. Neil Tennant y el Naturalismo de Penelope Maddy

I. Introducción
   a. Naturalización de las Matemáticas
   b. Naturalización de la Filosofía de las Matemáticas
II. ¿Qué perdemos del naturalismo de Quine, cuando lo convertimos en el naturalismo de Maddy?
   a. Naturaleza
   b. Holismo
III. ¿Qué gana Maddy?
   a. Retención del a-priori
   b. Autonomía Ontológica de las Matemáticas
   c. El Argumento de Indispensabilidad se vuelve Innecesario
IV. Problemas del Naturalismo de Maddy
   a. La práctica matemática no es tan unitaria como parece asumir Maddy
   b. La práctica matemática no está tan aislada – en sus aspecto justificatorio –

c. No es posible separar el aspecto descriptivo del normativo tan fácilmente

B. J. M. Dieterle y el Naturalismo Astrológico y Teológico

I. Naturalismo Sui-generis

a. Sin Naturaleza, sin holismo

b. Quietismo

II. Aplicación de las Matemáticas

a. ¿Qué nos dice sobre las matemáticas, sus objetos y sus métodos?

b. ¿Cómo podemos explicarla?

c. ¿Cómo podemos distinguir una aplicación exitosa de otra que no lo es?

d. ¿Es posible aplicar una teoría al mundo natural sin que ésta se vuelva, en algún sentido, *natural*?

i. La doble dimensión del carácter formal de las matemáticas: Sobre todo y sobre nada.

REFERENCIAS

Abbagnano, Nicola, (1974), *Diccionario de Filosofía*, segunda edición en español, Fondo de Cultura Económica, México.

Anglin, W. S. (1994) *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, Amsterdam: Springer Verlag

Azzouni, Jody, (1998) "On "On what there is"", *Pacific Philosophical Quarterly*, vol. 79, No. 1

(1994), *Metaphysical Myths, Mathematical Practice*, Cambridge: Cambridge University Press.

Balaguer, Mark, (2004), "Platonism in Metaphysics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2004 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = http://plato.stanford.edu/archives/sum2004/entries/platonism/

Barceló, Axel, (2004), “Revisionismo en la Filosofía de las Matemáticas”, *Signos Filosóficos*, vol. 6, no. 12, pp. 149-154.

Bonjour, Laurence, (????) “Metaphysical Objections to Rationalism”, en *In Defense of Pure Reason*, Oxford : Clarendon ; New York : Oxford University.

Burgess, John P. And Gideon Rosen (1997) *A Subject with no Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*, Oxford : Clarendon ; New York : Oxford University Press.

Burgess, John P. ,(2004) “Quine Analyticity and Philosophy of Mathematics”, *The Philosophical Quarterly*, vol. 54, no. 214, pp.38-55

(2005) “Nominalism Reconsidered” en S. Shapiro, (ed.), *Handbook for the Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press.

(2004), Reseña de *Deflating existential consequence: a case for nominalism* de Jody Azzouni, *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 10, pp. 573-4.

Caba, Antonio (1998) “Balance de la Filosofía de la Matemática en el Siglo XX”, en P. F. Martínez-Freire (ed.) *Filosofía Actual de la Ciencia*, suplemento 3 de *Contrastes. Revista interdisciplinar de Filosofía*, pp. 271-305.

Carnap, Rudolf (1950) 'Empiricism, Semantics and Ontology' Revue Internationale de Philosophie 4 (1950): 20-40. Reimpreso como suplemento a *Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic*, enlarged edition, University of Chicago Press, 1956.

Chihara, Charles (1990) *Constructibility and Mathematical Existence*, Oxford: Oxford University Press.

Colyvan, Mark, (2001), *The Indispensability of Mathematics,* Nueva York: Oxford University Press.

(1998) 'Can the Eleatic Principle be Justified?', *The Canadian Journal of Philosophy*, Vol. 28, No. 3 (September 1998), pp. 313-36.

Corfield, David (2003) *Towards a Philosophy of Real Mathematics*, New York : Cambridge University Press.

De Caro, Mario & David Macarthur, (2004), Introducción a *Naturalism in Question*, Harvard University Press, pp. 1 – 17.

Dieterle, J. M. (1999) "Mathematical, Astrological, and Theological Naturalism", *Philosophia Matemática* (3), vol. 7, pp. 129-135.

Dummett, Michael, (1991), *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge: Harvard University Press.

Fernández de Castro, Max, (2005), "El Revisionismo en Filosofía de las Matemáticas", *Signos Filosóficos*, vol. 7, núm. 13, enero-junio, pp. 115-120.

(2004), *Quine y la Ontología Abstracta*, Biblioteca de *Signos Filosóficos*, UAM-I, México, D.F.

Field, Harty, (1980). *Science Without Numbers*. Oxford: Blackwell.

(1989) "Realism and Anti-Realism about Mathematics" en Field (1989), pp. 53-78.

(1989). *Realism, Mathematics and Modality*. Oxford: Blackwell.

Frege, Gottlöb, (1884), *Der Grundlagen die Arithmetik*. Translated by J.L. Austin as *The Foundations of Arithmetic*, Oxford: Basil Blackwell, 1953,

Friedman, Michael, (1990), "Kant on Concepts and Intuitions in the Mathematical Sciences." *Synthese* 84, 213 - 257.

Fuller, Steve, (2006), "The Philosophical Buck Stops Here", *Philosophical of the Social Sciences* 36 (3), 355-366.

Goldman, (1967),

Hacker, P. M. S., (2006), "Passing by the Naturalistic Turn: On Quine's Cul-de-Sac", *Philosophy*, 81, 231-253.

Hale, Robert, (1987), *Abstract Objects*, Oxford: Basil Blackwell.

Hellman, Geoffrey, (1989), *Mathematics without Numbers*, Oxford: Oxford University Press.

(2001), "On Nominalism", *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 62, pp. 691—705.

Hersh, Reuben (1997) *What is Mathematics, Really?* New York: Oxford University Press.

Hilbert, D., 1899, *Grundlagen der Geometrie*. Translated by E. Townsend as *Foundations of Geometry*, La Salle, IL: Open Court, 1959.

Hume, David, (1978), *A Treatise of Human Nature*, segunda edición, Oxford: Oxford University Press.

Katz, Jerrold, (1998), *Realistic Rationalism,* Boston: MIT Press.

Kitcher, Philip, (1984), *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford: Oxford University Press.

Locke, John, (1980), *Ensayo sobre el Entendimiento Humano*, dos volúmenes, Madrid: Editorial Nacional.

Lynch, Michael y Steve Woolgar, editors, (1990), *Representation in Scientific Practice*, Cambridge: The MIT Press.

Maddy, Penelope, (1990), *Realism in Mathematics,* Oxford: Oxford University Press.

(1997), *Naturalism in Mathematics,* Oxford: Oxford University Press.

(1998), "Naturalizing Mathematical Methodology" en Matthias Schirn (ed.) *Philosophy of Mathematics Today: proceedings of an International Conference in Munich* (Oxford: Oxford University Press) 75-93

(2001), "Naturalism: Friends and Foes" en James E. Tomberlin (ed.), *Metaphysics, Philosophical Perspectives*, no. 15, suplemento de *Noûs*, vol. 35, pp. 37-67(31).

(2005), "Mathematical Existence", *Bulletin of Symbolic Logic,* vol. 11, no. 3, pp. 351–376.

McCarty, David (1998) “Intuitionism”, *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, vol. 4. pp. 846-853.

Mendell, Henry, (2004) "Aristotle and Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2004 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2004/entries/aristotle-mathematics/>.

Mill, Stuart, (1843), *A System of logic*, Londres: Longmans, Green and Company.

Paseau, Alexander, (2005), “Naturalism in Mathematics and the Authority of Philosophy”, *Brittish Journal for the Philosophy of Science*, **56**, 377-396

Panza, Marco, (*en prensa*), “Ante Rem Structuralism and Neo-Fregean Platonism:What Should Count as a Substantial Response to Benacerraf's Dilemma?”

Pinto, Silvio, (2005),

Quezada Pulido, Wilfredo, (2005), “¿Quién revisa, cómo se revisa y qué hace posible revisar la matemática?”, *Signos Filosóficos*, vol. 7, núm. 13, enero-junio, pp. 107-114

Quine, W. v. O., (1981), “Things and Their Place in Theories” en *Theories and Things*, Cambridge: Harvard University Press, pp. 1-23

(1976), “Posits and Reality” en *The Ways of Paradox*, editción revisada, Cambridge, MA: Harvard University Press, pp. 246-254. Original de 1955.

(????) “On what there is” en *From a Logical Point of View*, segunda edición, Cambridge, MA: Harvard University Press, pp. 1-19. Original de 1948.

(1981), "Five Milestones of Empiricism," en *Theories and Things,* Cambridge: Harvard University Press, 71. Original de 1975.

Raley, Ivonne, (2005) “Ontological Naturalism”, *Pacific Philosophical Quarterly,* vol. 86, no. 2, pp. 284-294.

Rayo, Agustín, (2003), “Success by Default?”, *Philosophia Mathematica,* 11(3), pp. 305-322.

Resnik, Michael, (1997), *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford: Oxford University Press.

(1980), *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Ithaca: Cornell University Press.

Rosen, Gideon, (1999), Estudio Crítico de *Naturalism in Mathematics* de Penelope Maddy, *British Journal for the Philosophyof Science*

Shapiro, Stewart, (1997), *Philosophy of Mathematics; Structure and Ontology*, Oxford: Oxford University Press.

(2000), *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

Tennant, Neil (2000) "What is Naturalism in Mathematics, Really?", *Philosophia Mathematica* (3), vol. 8, pp.316-338.

Wright, Crispin, (1983), *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen, Scotland: Aberdeen University Press

Yablo, Stephen (1998), "Does ontology rest on a mistake?" *Proceedings of the Aristotelian Society*, supplement. vol. 72, 229-261. http://www.mit.edu/~yablo/om.pdf

Young, Michael J., (1982), "Kant on the Construction of Mathematical Concepts", *Kant-Studien* 73: 17-46.

Una bibliografía más completa sobre la obra de Penelope Maddy se encuentra en http://sun3.lib.uci.edu/eyeghiay/Philosophy/Faculty/maddy.html

Una bibliografía más completa sobre el Nominalismo en Matemáticas se encuentra en: http://weka.ucdavis.edu/~ahwiki/bin/view/Arche/MathNominalism