Filosofía de las Matemáticas

Dr. Axel Arturo Barceló Aspeitia
abarcelo@filosoficas.unam.mx

La Abstracción en la Epistemología Empirista de las Matemáticas

Apuntes para la sesión del 20 de febrero de 2020

– adaptado del primer capítulo de *Sobre el Análisis* 2019 –

1. El reto epistemológico del empirismo: conocimiento general y experiencia particular

El problema fundamentales de la epistemología de las matemática ha sido conciliar la aparente tensión entre un conocimiento matemático objetivo abstracto y universal y una experiencia subjetiva, concreta y particular. ¿Cómo es posible que el humano presuma tener conocimiento objetivo sobre los objetos matemáticos cuando nuestra experiencia es sólo de objetos físicos particulares, miembros particulares de grupos, etc.?

En este momento puedo afirmar con confianza que la playera que traigo puesta es naranja. Si me preguntan cómo puedo estar tan seguro, bien podría responder que lo sé y que lo sé porque en este momento puedo voltear hacia abajo y ver claramente que es así. No se necesita ser un empirista para estar satisfecho con esta respuesta tan simple y reconocer que la experiencia nos da conocimiento del mundo de este tipo. Sin embargo, con la misma confianza y seguridad puedo afirmar también que el siete es un número primo y que la mitad de dieciocho es nueve. Ahora bien, si se me preguntara cómo puedo estar tan seguro de estas afirmaciones, aunque puedo seguir apelando a mi conocimiento de dichas verdades, la respuesta no puede ser tan simple. No hay ningún lugar al que pueda voltear para ver el carácter primo del siete, ni la razón entre nueve y dieciocho. Puedo contar nueve objetos empíricos frente a mí, pero al verlos no veo que el nueve es la mitad de dieciocho ni que, por lo tanto, no es un número primo. El que nueve es la mitad de dieciocho no parece ser algo que descanse en ningún grupo de objetos particulares por mas que éstos sean nueve o dieciocho, sino que parece tratar sobre *el número nueve* o, tal vez, sobre todos los grupos de nueve objetos posibles, pero estos no parecen ser el tipo de cosas que uno pueda ver o de alguna manera tener presentes en la experiencia. La pregunta sigue siendo, pues, cómo puedo saber sobre estas cosas (abstractas) si mi experiencia es de otras (concretas).

En la filosofía occidental, suelen darse dos tipos de respuesta a este problema: el racionalismo —desde la teoría de la reminiscencia de Platón (Ozmanczik 1986) hasta las teorías contemporáneas sobre lo innato (Bonjour 1998)— ha tratado de resolver esta tensión apelando a ideas, capacidades y conocimientos generales previos o independientes de la experiencia; mientras que el empirismo ha tenido que buscar otro tipo de salida que no recurra a estos recursos racionalistas, pues le parecen misteriosos o inexistentes (Boghossian 1997, Ayer 1946). El reto epistemológico del empirismo puede resumirse, por lo tanto, en explicar y fundamentar el conocimiento objetivo y general en una experiencia particular y subjetiva (Fernández de Castro 2004).[1]

La solución tradicional del empirista ha sido apelar a *representaciones abstractas*: entidades que se perciben o se captan de manera subjetiva y particular pero cuyo contenido es

---

[1]. En realidad, existe también una tercera opción, de la cual, sin embargo, diré muy poco: rechazar que el contenido de nuestro conocimiento sea general. En *The Reenchantment of the Concrete* (1992), por ejemplo, Francisco J. Varela sostiene que " las unidades propias del conocimiento son principalmente concretas [...] y este conocimiento concreto no es [...] un primer paso hacia algo más [sino] que es la forma en que llegamos al conocimiento y donde nos quedamos."

general y objetivo: conceptos, modelos mentales, teorías, expresiones generales, etc.[2] Así, aunque no podemos tener presente en la experiencia al nueve *qua* número, sí podemos tener en la mente o en el lenguaje un concepto general de la cantidad nueve; no la cantidad de este u otro grupo de nueve objetos, sino el nueve en abstracto. La idea básica detrás de esta solución es argumentar que aunque no podemos percibir nada *realmente* abstracto, podemos tener representaciones que de alguna manera van mas allá del contenido de nuestra experiencia, tales que a través de ellas podemos condensar muchas experiencias, de muchas personas, desde muchas subjetividades y de esta manera por lo menos acercarnos un poco al ideal de conocimiento objetivo y general de las matemáticas.

Pero postular la existencia de este tipo de representaciones no es suficiente. Para que una estrategia de este tipo funcione, es necesario resolver tres cuestiones fundamentales: primero, determinar cuál es el contenido y comportamiento lógico de estas representaciones abstractas; segundo, explicar su papel y relación con nuestro conocimiento de lo particular y concreto; y finalmente, explicar la naturaleza misma del conocimiento matemático, no solamente como medio de conocimiento de lo concreto, sino como campo disciplinario autónomo. En otras palabras, es necesario determinar ¿cómo es posible que el uso de representaciones abstractas nos ayude a conocer y, en general, a vivir en el mundo concreto al que pertenecemos?

---

[2]. Por lo general, cuando hablo de representaciones lingüísticas, me refiero a cualquier sistema de representaciones extra-mentales: diagramas, señales, mapas, etc. (Barwise y Allwein 1993, Lynch & Woolgar 1990). Notable excepción son las secciones del cuarto y quinto capítulos en las que trato a las representaciones pictóricas de manera explícita. Sobre las diferencias, similitudes y relaciones entre representaciones lingüísticas e imágenes, véase (Barceló 2012).

No nos debe sorprender el que los filósofos de las ciencias naturales se hayan concentrado en responder a la segunda cuestión (¿qué papel juega la abstracción en la construcción de nuestro conocimiento de lo concreto?), mientras que los filósofos de la lógica y las matemáticas se hayan concentrado en la tercera (¿cómo es posible tener conocimiento objetivo de lo abstracto?), al tiempo que la filosofía del lenguaje, la filosofía de la mente, las ciencias cognitivas y la lógica han tratado de arrojar luz sobre la primera de ellas.

La clasificación de estrategias que ofrezco a continuación no pretende ser exhaustiva, ni abarcar todas las concepciones de lo abstracto que se han ofrecido en la historia de la filosofía occidental. Asimismo, el análisis que sigue tampoco debe tomarse como un intento de determinar cuál es la concepción *correcta* de la abstracción. Lo más probable es que cada una capture algunos casos e intuiciones generales de lo que llamamos abstracción, sin que ninguna logre capturarlas a todas. Mi interés principal, mas bien, es hacer un mapa de las diferentes concepciones de la abstracción para, luego, concentrarme en las concepciones del análisis y la estructura que les subyacen.

2. Las estrategias clásicas: Locke y Hume

Las distintas estrategias que el empirismo ha adoptado para explicar el papel de la representación en la construcción del conocimiento científico pueden encontrarse en los orígenes mismos del empirismo moderno. En el debate epistemológico entre Locke y Hume, podemos ver ilustradas dos tendencias generales que ha tomado el empirismo para resolver la tensión entre conocimiento general y experiencia particular. No me interesa aquí reconstruir el debate entre estos dos pensadores con absoluta fidelidad o precisión histórica, sino usarlos para identificar dos tendencias epistemológicas generales al interior del empirismo.

Locke retoma del racionalismo platónico la necesidad de postular ideas generales para explicar la naturaleza del conocimiento científico. Para él, el conocimiento propio de la ciencia tiene como objeto y materia las ideas generales, que a diferencia de las planteadas por la teoría de la reminiscencia de Platón, no son innatas sino que surgen de la experiencia. Es necesario, por lo tanto, explicar qué significa decir que las ideas generales surgen de la experiencia cuando el contenido de ésta es, como ya hemos mencionado al principio de este capítulo, particular. En otras palabras, es necesario postular un mecanismo psicológico de *abstracción* para producir ideas generales —también conocidas como abstractas— a partir del contenido particular de nuestra experiencia. Según Locke, una vez obtenidas estas ideas, el conocimiento general surge del estudio de las propiedades y relaciones generales entre ellas (1980, Libro III, cap. 3, §6).

Hume (1978, Libro I, secc. 7), en cambio, rechaza la existencia de ideas generales y propone explicar el conocimiento general a partir de los mecanismos cognitivos que permiten *tratar* lo particular *de manera general*. Por eso para él no existen representaciones que sean generales en sí mismas. Todas las representaciones son particulares y lo abstracto se da sólo por el uso de ciertas representaciones de casos particulares que tomamos como *ejemplares* para nuestra investigación científica. Idealizaciones como los dibujos anatómicos del siglo XVII, o los modelos físicos o materiales como la mosca *drozoophila* en la investigación de la herencia, son ejemplos de representaciones científicas abstractas en el sentido humeano, es decir, particulares en sí mismas pero generales en su uso.

Figura 1. Ejemplo de representación abstracta de tipo humeano. Ejemplar botánico.[3]

En la vida diaria nos encontramos continuamente con representaciones abstractas de tipo humeano. Cada vez que compramos por catálogo las utilizamos:[4] Cuando ordenamos un par de zapatos por catálogo, por ejemplo, no esperamos recibir a vuelta de correo el mismo par de zapatos que aparecen fotografiados en el catálogo, sino uno *del mismo tipo*. En sentido estricto, lo que aparece en el catálogo es un *ejemplar* del *tipo* de zapatos en venta. La fotografía de dicho

---

[3] Espécimen de *Holotype* of *Erigeron grandiflorus subsp. arcticus Porsild Plant*, recogida en Victoria Island, Holman Island trading post, A.E. Porsild, 17342, Agosto 8, 1949. CAN 226845. Artic Island Distribution. S.G. Aiken, M.J. Dallwitz, L.L. Consaul, C.L. McJannet, L.J. Gillespie, R.L. Boles, G.W. Argus, J.M. Gillett, P.J. Scott, R. Elven, M.C. LeBlanc, A.K. Brysting and H. Solstad. 1999, en adelante. Flora of the Canadian Arctic Archipelago: Descriptions, Illustrations, Identification, and Information Retrieval. Versión del 29 de Abril, 2003. http://www.mun.ca/biology/delta/arcticf/'

[4] En este ejemplo, por supuesto, no está en juego solamente el mecanismo humeano que caracterizo, sino también la representación fotográfica, pero podemos ignorar este elemento del ejemplo para concentrarnos en su componente humeano.

par de zapatos representa de manera humeana el tipo de zapato al que dicho par de ejemplares pertenecen. Aunque el par de zapatos que estamos comprando no es precisamente ése que ha sido fotografiado, es *similar* para los fines relevantes de compra-venta. Esta similitud es la que permite que la abstracción humeana funcione y que el ejemplar sirva de *representante* del tipo.

Para extraer conocimiento general de estos ejemplares, es necesaria la postulación de mecanismos inferenciales *inductivos* en un sentido muy amplio que incluye, no solo a la inducción propiamente dicha, sino también a las inferencias analógicas, y otras capaces de producir conocimiento general a partir del estudio de casos particulares. Así podemos obtener conocimiento general sobre, por ejemplo, todos los miembros de una especie biológica tras haber observado sólo algunos ejemplares particulares.

Actualmente, la perspectiva humeana ha sido adoptada en varias áreas de la filosofía para tratar de dar cuenta de una gran variedad de fenómenos. En psicología cognitiva, como el caso de la teoría de ejemplares (Nosofsky & Johansen 2000; Ross & Makin 1999, Smith y Medin 1981, 1999), basada en el concepto Kuhniano de paradigma (Khun 1971) es heredera directa de la concepción humeana. Según esta teoría, nuestros conceptos psicológicos no son en realidad representaciones abstractas sino un conjunto de representaciones particulares de objetos específicos que sirven de ejemplares del tipo y que guardamos en la memoria. Cuando pensamos en un tipo de objeto, ej. 'mueble', no traemos a la mente ningún mueble abstracto, sino un mueble particular (comúnmente una silla) y aunque reflexivamente sabemos que no todo mueble es una silla, tratamos a la silla como representativa de dicho tipo.

Esta manera de entender los conceptos parece poder explicar varios fenómenos psicológicos: por ejemplo, porqué nos cuesta menos trabajo determinar que un pastor alemán es un perro que un pekinés, o porque nos cuesta tanto trabajo definir aún los conceptos que intuitivamente nos parecen más claros (Murphy 2002, Carey 2009). En teoría de la argumentación, para mencionar un área completamente distinta de la filosofía, también se ha apelado a esta perspectiva sobre la abstracción para dar cuento de algunos tipos de fenómenos. Por citar alguno, Christopher Tindale (2006) ha adoptado la perspectiva humeana para tratar de explicar la importancia de la racionalidad para la argumentación desde una perspectiva retórica. Según Tindale, para que una estrategia argumentativa sea razonable no debe dirigirse a una audiencia racional abstracta, sino a su audiencia real, tratándola como si fuera universal. De esta manera, podemos conciliar la concepción retórica de la argumentación (donde ésta siempre ha de estar dirigida a una audiencia en particular) con el ideal de racionalidad (que presumiblemente es universal), sin tener que postular una audiencia ideal abstracta.

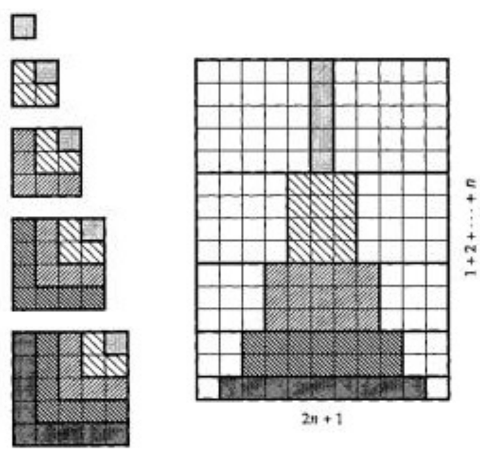

Figura 2. Representación Humeana en Matemáticas

Continuando con los ejemplos, en filosofía de las matemáticas, James Robert Brown (2008) ha defendido la tesis de que los diagramas matemáticos (en particular, los diagramas de las pruebas visuales en aritmética, *cf.* Nelsen 1993) son representaciones humeanas, a saber, imágenes que en sentido estricto representan un solo caso, pero que al mismo tiempo nos permiten de alguna manera *ver* en ellos (en un sentido cognitivo no sensorial) cierta generalidad que se puede extender a un número infinito de casos similares. Para Brown, esto significa que, en sentido estricto, "no son realmente representaciones", sino más bien "instrumentos" o "ventanas" que nos permiten asomarnos al espacio abstracto dónde viven los objetos matemáticos (Brown 2008, 40-44 Traducción mía). Aun si uno no acepta la ontología platonista de Brown, no es difícil darse cuenta de las matemáticas están llenas de estrategias humeanas de representación. Antes del uso extendido de variables, ej. los primeros algebristas presentaban sus teoremas y técnicas usando ejemplos particulares, y aún después de que las matemáticas adoptaran el tipo de lenguaje formal con el que las asociamos actualmente, los diagramas de casos particulares siguen usándose para ilustrar, enseñar y hasta probar resultados generales.

Nótese cómo el debate no está planteado en términos ontológicos. La discusión entre Locke y Hume no versaba sobre la existencia o inexistencia de *objetos* abstractos, sino sobre la existencia o inexistencia de *ideas* abstractas (*i.e.*, representaciones mentales generales o conceptos). Para Locke, "la universalidad no pertenece a las cosas mismas, todas las cuales son particulares en su existencia" (1980, Libro III, Cap. 3, §11, p. 623). En otras palabras, Locke y Hume eran lo que hoy consideramos *nominalistas*, sólo creían en la existencia de lo concreto. Pero, pese a que no creían en la existencia de objetos abstractos, sí reconocían la existencia y la eficacia del uso de representaciones abstractas. A decir verdad, como señalan los mismos Burgess y Rosen (1997), aun desde antes del S. XVII lo abstracto no se concebía como una categoría ontológica, sino gramática (semántica). No es sino hasta el siglo XVII que la discusión sobre la representación lingüística de lo abstracto da pie a la discusión sobre la representación mental de lo abstracto. En el *Ensayo*, Locke señala que mediante la abstracción, "se habilita a las ideas para representar a más de un individuo (*ibid.* p. 618)", mientras que para Hume, en vez de ideas abstractas, lo que tenemos son ideas "particulares en su naturaleza, pero generales en su representación (*ibid.* p. 22)". En ambos casos lo abstracto no es una categoría ontológica sino semántica. Lo que es abstracto son las representaciones (mentales o lingüísticas), no los objetos.

La transición del debate de ideas a un debate de objetos se debe al anti-psicologismo de finales del siglo XIX (aunque Burgess y Rosen (1997) ubican sus raíces en la dualidad mente/cuerpo introducida del pensamiento medieval al moderno por el trabajo de Descartes). Para los anti-psicologistas (especialmente Frege 1884), lo mental era subjetivo y como tal, insuficiente para servir como fundamento para el conocimiento genuino. De tal manera que aunque se explicara la capacidad de representar mentalmente lo abstracto, aún era necesario que dichas representaciones y el conocimiento obtenido mediante ellas fuera efectivamente objetivo. Para ello, pensaba Frege, era necesario que existieran también los objetos y hechos abstractos representados por dichas ideas. En el caso de las matemáticas, esto significaba que independientemente de la existencia y uso de conceptos y símbolos matemáticos, era necesario garantizar la existencia de los referentes de dichos conceptos y símbolos.

Por lo menos desde el *Cratilo* y el *Teeteto* de Platón, la filosofía occidental ha mantenido la idea de que el conocimiento objetivo y general es posible sólo si su objeto propio es también objetivo y general. Parece ser que para que el conocimiento sea objetivo y general, es necesario que sus objetos sean también generales y objetivos; es decir, que existan de manera objetiva, independiente de nuestras mentes y convenciones. De esta manera, la cuestión epistemológica de la objetividad y generalidad del conocimiento ha dado pie a la postulación de los llamados objetos abstractos.

3. Hacía una epistemología de las representaciones abstractas

Para construir una teoría epistemológica de lo abstracto que apele a representaciones como la que proponían Hume o Locke, es necesario responder a tres preguntas fundamentales: (i) ¿cómo accedemos a las representaciones abstractas?, (ii) ¿qué determina su contenido? y (iii) ¿cómo las usamos para obtener conocimiento? En otras palabras, el problema es explicar la adquisición, posesión y manejo de conceptos generales.[5]

Lockeanos y humeanos suelen responder a estas preguntas de manera distinta. A grandes rasgos, los lockeanos apelarán a algún proceso lógico o psicológico de abstracción para explicar la adquisición y el contenido de nuestras representaciones abstractas. En cambio, los humeanos contarán una historia distinta sobre cómo no se requiere ninguna facultad o mecanismo de acceso especial a las representaciones abstractas. Para ilustrar esta diferencia, en la siguiente sección tomaré como ejemplo la manera en que estas preguntas se han resuelto en la filosofía de las matemáticas.

No es necesario repetir que uno de los problemas fundamentales en filosofía de las matemáticas es conciliar dos intuiciones muy fuertes acerca del conocimiento matemático: por un lado, el hecho de que las matemáticas no parecen tratar sobre objetos y hechos concretos, dicho de otro modo, que objetos como números, grupos algebraicos, espacios topológicos, etc.,

5. Excepto cuando indique lo contrario, de ahora en adelante, al hablar de conceptos, excluyo a los conceptos individuales.

no parecen ser objetos concretos y que las propiedades que nos interesan de ellos parecen ser propiedades *objeticas* que tienen independiente de nosotros, nuestros deseos, convenciones, etc., y por el otro, la fuerte intuición de que los matemáticos no tienen ningún tipo de capacidad epistémica extraordinaria, sino que cuando hacen matemáticas, trabajan con lo mismo a lo que tenemos acceso todos los seres humanos: la experiencia de objetos y situaciones concretas y particulares en el mundo. En otras palabras, el problema es explicar cómo es posible que, atendiendo sólo a cálculos en lápiz y papel, observando sólo hechos contingentes, concretos y particulares, podemos obtener conocimiento matemático presumiblemente necesario, abstracto y universal.

Este problema es conocido como el reto de Benaceraff por la famosa formulación que le dio el filósofo estadounidense Paul Benacerraf en su capítulo "Verdad en matemáticas" de 1973, aunque en el fondo no es sino el mismo problema al que enfrenta todo empirismo para fundamentar el conocimiento de lo abstracto del cual hemos hablado a lo largo de este capítulo. No es de sorprender, por lo tanto, que las estrategias que han surgido para enfrentar el reto de Benacerraf hayan sido del mismo corte como las que la tradición empirista ha dado al problema de fundamentar el conocimiento objetivo y general en la experiencia particular y concreta, es decir, no es de sorprender que las epistemologías empiristas, le den un lugar central en su explicación del conocimiento matemático a las representaciones abstractas.

De manera análoga a lo que sucedía en el caso no-matemático, una epistemología empirista de las matemáticas debe explicar, entre otras cosas, (i) la adquisición de conceptos matemáticos, (ii) la fijación del contenido de los mismos y (iii) su papel en la construcción del conocimiento matemático. En general hay que explicar cómo entidades concretas representan hechos y objetos matemáticos. ¿Cómo es posible, por ejemplo, que un numeral (un objeto concreto) represente un número (un objeto abstracto) o que manipulando los primeros (v.gr., realizando cálculos aritméticos básicos) podamos obtener conocimiento sobre los segundos? ¿Cómo es posible que un diagrama, que muestra una configuración geométrica particular, represente y nos permita obtener conocimiento de una situación geométrica general que involucra propiedades y relaciones entre objetos abstractos? En consecuencia, el reto del empirismo es fundamentar, a partir de una experiencia que sólo tiene acceso a los fenómenos particulares y concretos, el conocimiento matemático que por lo menos *prima facie* parece ser radicalmente general y abstracto. No es sorprendente en este caso que las propuestas epistemológicas que ha ofrecido el empirismo se agrupen también dentro de las tendencias generales lockeana y humena ya identificadas.

Las propuestas lockeanas generalmente parten de aceptar la existencia de conceptos (y, en algunos casos, objetos) propiamente matemáticos que dan contenido a nuestro conocimiento matemático. Al igual que en el caso de Locke, estas propuestas requieren plantear algún tipo de mecanismo de abstracción que permita acceder epistemológicamente a dichos conceptos (u objetos) a partir de la experiencia y de una lógica deductiva que posibilite estudiar las propiedades y relaciones entre ellos. El espécimen tal vez más conocido de una epistemología de corte lockeano para las matemáticas —o, por lo menos, para la aritmética— es el logicismo de Gottlöb Frege, quien intenta fundamentar el conocimiento matemático en una capacidad de abstracción capaz de darnos acceso al tipo de conceptos lógicos que para él son los conceptos matemáticos. Sin embargo, en manos de Frege este proceso de abstracción pasa de ser un mecanismo psicológico (como lo fue en Locke) a ser un mecanismo lógico.[6] Esta misma idea de abstracción lógica está presente en autores contemporáneos neo-fregeanos del estilo de Dummett (1991) o del de Crispin Wright (1983) y Robert Hale (1987), además de en estructuralistas como Stewart Shapiro (1997, c.4).[7] En consonancia con su lockeanismo, estos filósofos contemporáneos favorecen una lógica deductiva para las matemáticas, ya que para ellos, una vez que se tiene acceso a los conceptos abstractos de la matemática, es posible manipularlos lógicamente de una manera puramente deductiva (*cf.* Bonjour, 1998; Katz 2004, 1998).

El empirismo humeano, en cambio, requiere fundamentar el conocimiento matemático en experiencias y objetos particulares, sin mediación alguna de conceptos u objetos universales. El inductivismo radical de Stuart Mill (1843, libro II, caps. 5 y 6) es tal vez el ejemplo más conocido de una epistemología de las matemáticas de corte humeano, pero no el único. La amplia tradición *sintética* en la geometría (*cf.* Torretti 1978 y Nagel 1979)[8], ejemplificada

---

[6] En sentido estricto, el logicismo de Frege no es un empirismo, en tanto que los objetos de los que parte su abstracción no son objetos empíricos sino objetos lógicos primitivos. Sin embargo esto solamente mueve el problema del acceso epistémico al nivel de estos objetos lógicos primitivos (*cf.* Resnik 1980, 175). Lo incluyo en este campo porque, por lo demás, su propuesta epistemológica encaja perfectamente dentro del esquema lockeano. Además, ha servido de inspiración a las propuestas neo-fregeanas eminentemente empiristas.

[7] En el caso de Stewart Shapiro (1997), la abstracción lógica se complementa con una abstracción psicológica para el reconocimiento de patrones simples.

[8] En este sentido, el debate entre las tradiciones analíticas y sintéticas en geometría moderna puede verse como una disputa entre una concepción lockeana de la geometría —la de la tradición analítica, en la cual la formalización garantizaba la pureza de las representaciones abstractas— y una humeana —la sintética. Igualmente, la formalización del álgebra y el análisis en los albores de la era moderna debe verse como el paso de un álgebra humeana, donde operaciones concretas eran usadas como 'ejemplares' a un álgebra abstracta en el sentido lockeano (Barceló 2004).

claramente en la epistemología de la geometría de Immanuel Kant (*cf.* Young, 1982, y Friedman, 1990) pertenece también a la corriente humeana. Para Kant, el método diagramático de la geometría constructiva deja claro cómo podemos obtener conocimiento matemático general a partir de nuestra experiencia y manejo de objetos particulares: los diagramas. Para el filósofo alemán, el método de la geometría consiste en explotar las características generalizables de figuras geométricas particulares, a partir del reconocimiento y la consideración de casos exhaustivos, para obtener pruebas y construcciones generales sin la mediación de universales geométricos. Esta misma idea está presente en la aritmética finita de rayas de Hilbert (1926) y en el constructivismo de Markov (1972), ambas de inspiración claramente kantiana; además de teorías más recientes como la de Michael Resnik (1997),[9] ninguna de las cuales apela a ningún tipo de abstracción para dar cuenta del conocimiento matemático.

En décadas recientes, el empirismo en filosofía de las matemáticas ha recibido un nuevo ímpetu como parte del nuevo paradigma naturalista dentro de la filosofía. No es extraño que en su interior podamos hacer también una distinción entre un enfoque lockeano y otro humeano, la cual se alinea bastante bien con la distinción entre realistas y anti-realistas. El naturalismo original de Quine (1981) y su variante desarrollada por Maddy (1990)[10] son ejemplos de naturalistas realistas de corte lockeano. En cambio, el naturalismo eleático de los nominalistas es más bien un empirismo humeano. El paralelismo entre ambas distinciones no debe

9. En (1997), Michael Resnik desarrolla una epistemología que "no se funda en transacciones causales o generadoras de información entre seres humanos y objetos matemáticos (Resnik, 1997, p. 175, mi traducción)", sino en nuestra capacidad de obtener información matemática confiable a partir de cálculos y "marcas sobre papel" (Resnik, 1987, pp. 86-7).

10 *Cf.* (1997), la cual no es empirista sino racionalista.

sorprendernos, basta recordar que detrás del debate epistemológico entre Locke y Hume descansaba una preocupación ontológica: la existencia de las ideas abstractas. La propuesta humeana surgió como un intento de dar sentido al conocimiento general y objetivo sin postular la existencia de ideas abstractas. No es motivo de sorpresa, por lo tanto, que su estrategia epistemológica haya sido adaptada por los nominalistas para dar sentido al conocimiento matemático evitando la postulación de objetos matemáticos abstractos. Después de todo, si se puede explicar la matemática sin conceptos abstractos, es superfluo postular objetos abstractos.

Como ya he señalado, una epistemología de las matemáticas de corte lockeano necesita explicar, entre otras cosas, nuestro acceso epistémico a conceptos matemáticos, es decir, nuestra capacidad de tener pensamientos matemáticos. Esto se logra generalmente postulando un mecanismo de *abstracción,* ya sea lógico (como el propuesto por logicistas y neo-logicistas), psicológico (como el propuesto por los intuicionistas), o ambos (como aparece, por ejemplo, en el estructuralismo de Shapiro 1997). Una vez postulado el mecanismo, es necesario, además, garantizar que dicho mecanismo nos dé acceso epistémico a conceptos matemáticos genuinos. En otras palabras, una vez que hemos postulado un mecanismo de abstracción, es necesario garantizar que lo abstraído en dicho proceso tenga contenido matemático (en lugar de contenido físico o lingüístico, entre otros). Para muchos esto significa que también es necesario demostrar que dichos conceptos se refieren a entes matemáticos reales y existentes.

Tanto para intuicionistas (como Brouwer (1975), para quien los objetos matemáticos son creaciones del pensamiento), como para neo-logicistas (como Wright (1983) o Azzouni (1994), para quienes los objetos matemáticos son creados por un proceso lógico de abstracción), el proceso de abstracción *crea* sus propios objetos, garantizando así, al mismo tiempo, su existencia y accesibilidad epistémica. Lockeanos de corte más radicalmente realista demandan además una garantía extra de la existencia objetiva *e independiente*[11] de los referentes de dichos conceptos.[12] Esta era la posición original de Frege en sus *Grundlagen* (1884) y es el motivo de las críticas recientes de autores como Agustín Rayo (2003) y Marco Panza (*en prensa a*) al neo-logicismo.

Finalmente, necesitamos también una metodología y una lógica que nos permitan obtener conocimiento matemático a partir del acceso epistémico logrado a través de la abstracción. Una vez que tenemos acceso epistémico a conceptos matemáticos y hemos garantizado su contenido, es fácil apelar a una metodología racionalista y a una lógica puramente deductiva para redondear nuestra teoría epistemológica. Este es el punto de menor contención dentro de la discusión epistemológica en filosofía de las matemáticas, pues la respuesta de los lockeanos a este reto lógico-metodológico es la misma de los racionalistas (y parece ser empíricamente adecuada; *i.e.* recupera el hecho de que efectivamente hacemos matemáticas usando una metodología racionalista y una lógica deductiva), aunque también hay fuertes intuiciones del lado de los empiristas humeanos quienes, como he mencionado, reconocen que, de hecho, el conocimiento matemático se construye a través de la manipulación de objetos concretos como fórmulas y diagramas.

---

[11] Es decir, independiente del proceso lógico o psicológico de abstracción.

[12] Es importante no confundir la existencia objetiva de los objetos matemáticos con la objetividad del conocimiento matemático. Los retos son distintos. Es necesario demostrar que el acceso epistémico a través de la abstracción captura la suficiente información matemática como para dar lugar a conocimiento objetivo. Es necesario, ej., que la manera en que se nos presente el objeto matemático sea tal que podamos reconocer en él sus propiedades matemáticas relevantes. En otras palabras, debe garantizarse la confiabilidad de nuestro acceso epistémico a los objetos matemáticos. Establecer el puente entre la existencia objetiva de los referentes de nuestros conceptos matemáticos y la objetividad del conocimiento obtenido de ellos no es un asunto trivial.