Conectivas lógicas: casos claros y casos dudosos

Basado parcialmente en un trabajo conjunto con Ricardo Arturo Nicolás Francisco
Gracias PAPIIT y gracias UMK.

Luis Estrada González
loisayaxsegrob@gmail.com

Seminario de Investigadores, IIF-UNAM
25 de agosto de 2021

1 Preliminares: semántica de Dunn; FDE

'A es verdadera': no $\sigma(A) = 1$ sino $1 \in \sigma(A)$
'A es falsa': no $\sigma(A) = 0$ sino $0 \in \sigma(A)$

Una fórmula A puede relacionarse con los valores de verdad en alguna de las siguientes cuatro maneras a través de una interpretación σ:

- A es verdadera pero no falsa, representada con '$1 \in \sigma(A)$ y $0 \notin \sigma(A)$'; más brevemente, $\sigma(A) = \{1\}$
- A es verdadera y también falsa, representada '$1 \in \sigma(A)$ y $0 \in \sigma(A)$'; más brevemente, $\sigma(A) = \{1, 0\}$
- A no es verdadera ni falsa, representada '$1 \notin \sigma(A)$ y $0 \notin \sigma(A)$'; más brevemente, $\sigma(A) = \{\ \}$
- A es falsa pero no verdadera, representada '$0 \in \sigma(A)$ y $1 \notin \sigma(A)$'; más brevemente, $\sigma(A) = \{0\}$

donde cada expresión de la forma $v_i \in (A)$, con $v_i \in \{1, 0\}$, se llama *átomo de Dunn*. Sea $v_i \in i(A)$ un átomo de Dunn. Diremos que $v_j \notin i(A)$, con $v_i, v_j \in \{1, 0\}$ y $v_i \neq v_j$, es su *contraparte booleana*.

Por ejemplo, los siguientes casos son (tomados horizontalmente) contrapartes booleanas:

$1 \in i(\sim A)$	$0 \notin i(\sim A)$
$0 \in i(A \wedge B)$	$1 \notin i(A \wedge B)$

$0 \notin i(A \vee B)$ $\qquad\qquad$ $1 \in i(A \vee B)$

FDE. El lenguaje L consiste de fórmulas formadas de la manera usual a partir de variables proposicionales y las conectivas $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$. Un *modelo* para L es una relación σ como la de arriba:

O bien $1 \in \sigma(p)$ ó $1 \notin \sigma(p)$, y o bien $0 \in \sigma(p)$ ó $0 \notin \sigma(p)$

$1 \in \sigma(\sim A)$ sii $0 \in \sigma(A)$

$0 \in \sigma(\sim A)$ sii $1 \in \sigma(A)$

$1 \in \sigma(A \wedge B)$ sii $1 \in \sigma(A)$ y $1 \in \sigma(B)$

$0 \in \sigma(A \wedge B)$ sii $0 \in \sigma(A)$ ó $0 \in \sigma(B)$

$1 \in \sigma(A \vee B)$ sii $1 \in \sigma(A)$ ó $1 \in \sigma(B)$

$0 \in \sigma(A \vee B)$ sii $0 \in \sigma(A)$ y $0 \in \sigma(B)$

$1 \in \sigma(A \rightarrow B)$ sii $0 \in \sigma(A)$ ó $1 \in \sigma(B)$

$0 \in \sigma(A \rightarrow B)$ sii $1 \in \sigma(A)$ y $0 \in \sigma(B)$

Un *bicondicional (extensional)*, $A \leftrightarrow B$, puede definirse como $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Sea Γ un conjunto de fórmulas de una lógica **L**. A is a *consecuencia lógica* de Γ en **L**, $\Gamma \models_{\mathbf{L}} A$, si y sólo si, para toda interpretación σ, $1 \in \sigma(A)$ si $\sigma(B)$ para toda $B \in \Gamma$. (Llamaremos a esto 'consecuencia lógica tarskiana'.)

Lo de arriba en tablas:

$\sim A$	A
$\{0\}$	$\{1\}$
$\{1,0\}$	$\{1,0\}$
$\{\ \}$	$\{\ \}$
$\{1\}$	$\{0\}$

$A \wedge B$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{1,0\}$	$\{1,0\}$	$\{1,0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$

$A \vee B$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\{1,0\}$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{1\}$	$\{1,0\}$
$\{\ \}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$
$\{0\}$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$

$A \rightarrow B$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{1,0\}$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{1\}$	$\{1,0\}$
$\{\ \}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$
$\{0\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$

A veces supondremos que el lenguaje puede enriquecerse con alguna de las siguientes dos conectivas, la negación *booleana*, $\neg A$, y el condicional *material*, $A \supset B$, evaluadas de esta manera:

$1 \in \sigma(\neg A)$ sii $1 \notin \sigma(A)$ $\qquad$ $1 \in \sigma(A \supset B)$ sii $1 \notin \sigma(A)$ ó $1 \in \sigma(B)$

$0 \in \sigma(\neg A)$ sii $0 \notin \sigma(A)$ $\qquad$ $0 \in \sigma(A \supset B)$ sii $1 \in \sigma(A)$ y $0 \in \sigma(B)$

y cuyas tablas de verdad son las siguientes:

$\neg A$	A
$\{0\}$	$\{1\}$
$\{\ \}$	$\{1,0\}$
$\{1,0\}$	$\{\ \}$
$\{1\}$	$\{0\}$

$A \supset B$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{1,0\}$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{\ \}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\{0\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$

2 El Plan de Bochum

El *Plan de Bochum* es el proyecto de dar una semántica modelo teórica, basada en la semántica de Dunn, para prácticamente todas las lógicas, que explique las características de esas lógicas, aun de las más exóticas y que incluso las haga plausibles.

Ejemplos: la negación
Dejemos todas las condiciones como en **FDE**, excepto la condición de verdad para la negación,
$1 \in \sigma(\sim A)$ sii $0 \in \sigma(A)$
y reemplacémosla con ésta:
$1 \in \sigma(\sim A)$ sii $0 \notin \sigma(A)$
Ésta es su tabla:

$\sim_R A$	A
$\{1,0\}$	$\{1\}$
$\{0\}$	$\{1,0\}$
$\{1\}$	$\{\ \}$
$\{\ \}$	$\{0\}$

Con esta negación se valida $A\vee \sim_R\sim_R A$ pero no $A\vee \sim_R A$. (Además, es una seminegación —i.e. $\sigma(\sim_R\sim_R A) = \sigma(\neg A)$, para toda σ— como las que investiga Ricardo en su tesis de doctorado.)

Dejemos todas las condiciones como en **FDE**, excepto la condición de falsedad para la negación,
$0 \in \sigma(\sim A)$ sii $1 \in \sigma(A)$
y reemplacémosla con ésta:
$0 \in \sigma(\sim A)$ sii $1 \notin \sigma(A)$
Ésta es su tabla:

$\sim_K A$	A
$\{\ \}$	$\{1\}$
$\{1\}$	$\{1,0\}$
$\{0\}$	$\{\ \}$
$\{1,0\}$	$\{0\}$

Con esta negación se validan $\sim_K (A\wedge \sim_K\sim_K A)$ y $\sim_K\sim_K (A\wedge \sim_K\sim_K A)$. $\sim_K$ también es una seminegación, aunque en general $\sigma(\sim_R A) \neq \sigma(\sim_K A)$.

Ejemplos: el condicional
Dejemos todas las condiciones como en **FDE**, excepto la condición de verdad para el condicional,
$1 \in \sigma(A \to B)$ sii $0 \in \sigma(A)$ ó $1 \in \sigma(B)$
y reemplacémosla con ésta:
$1 \in \sigma(A \to B)$ sii $1 \in \sigma(A)$ y $1 \in \sigma(B)$
Ésta es su tabla:

$A \to_{DF} B$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{1,0\}$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$
$\{0\}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$

Esta conectiva apareció por primera vez en un contexto trivaluado, en la lógica de Reichenbach. (Vean "Revisiting Reichenbach's logic", con Fernando Cano Jorge.)

Supongamos ahora que el lenguaje incluye el condicional material. Dejemos todas las condiciones fijas, excepto la condición de falsedad del condicional material,
$0 \in \sigma(A \supset B)$ sii $1 \in \sigma(A)$ y $0 \in \sigma(B)$
y reemplacémosla con la siguiente:
$0 \in \sigma(A \supset B)$ sii $1 \notin \sigma(A)$ or $0 \in \sigma(B)$
Ésta es su tabla:

$A \to_W B$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{1,0\}$	$\{1\}$	$\{1,0\}$	$\{\ \}$	$\{0\}$
$\{\ \}$	$\{1,0\}$	$\{1,0\}$	$\{1,0\}$	$\{1,0\}$
$\{0\}$	$\{1,0\}$	$\{1,0\}$	$\{1,0\}$	$\{1,0\}$

La lógica resultante es una lógica hiperconexiva; valida, entre otras cosas,
$\sim(A \to_W B) \leftrightarrow_W (A \to_W \sim B)$.

Problema: ¿Las conectivas modificadas son las conectivas pretendidas? (Llamemos 'casos dudosos' a las conectivas modificadas como en los casos recién vistos.)

3 Algunas soluciones

Propuestas homogéneas: el método para determinar si una conectiva es de cierto tipo es el mismo para todas las conectivas.
Ejemplo: una conectiva © es una negación/conjunción/disyunción/implicación
sii © tiene las mismas condiciones de verdad de una negación/conjunción/disyunción/implicación.
Otro ejemplo: una conectiva © es una negación/conjunción/disyunción/implicación
sii © tiene las mismas condiciones de falsedad de una negación/conjunción/disyunción/implicación.

Propuestas heterogéneas: el método para determinar si una conectiva es de cierto tipo es diferente, depende de cada conectiva.
Ejemplo: una conectiva © es una negación si y sólo si tiene las condiciones de falsedad de la disyunción; una conectiva © es una negación/conjunción/implicación
sólo si © tiene las mismas condiciones de verdad de una negación/conjunción/implicación.

(Aquí hay muchísimo más que decir; tal vez en un trabajo futuro con María del Rosario Martínez Ordaz.)

4 Otra solución: "la" consecuencia lógica al rescate

- Omori y Wansing: una conectiva @ es *afirmativa* (en **L**) sii $@A \models_{\mathbf{L}} A$ ó $A \models_{\mathbf{L}} @A$.
- Un requisito común —al menos desde Chellas en 1975— para un condicional no clásico $A > B$: $A > B \models_{\mathbf{L}} A \supset B$.

Propuesta: Para que un caso dudoso de conectiva sea la conectiva pretendida tiene que estar relacionado, mediante consecuencia lógica, con algún caso claro de la conectiva pretendida.
(Creo que algo como esto le gusta a Axel Barceló.)

Una conectiva es un *caso claro* de negación/conjunción/disyunción/implicación si sus condiciones de evaluación son los de la negación/conjunción/disyunción/implicación en **FDE** o son ajustes en esas condiciones.

Un *ajuste* en una condición de evaluación de **FDE** es cambiar uno o más de sus átomos de Dunn por su contraparte booleana en el lado derecho del bicondicional.

Ejemplo. Los siguientes son casos claros de negación:

$$1 \in i(\sim_1 A) \text{ sii } 0 \in i(A) \qquad 1 \in i(\sim_3 A) \text{ sii } 1 \notin i(A)$$
$$0 \in i(\sim_1 A) \text{ sii } 1 \in i(A) \qquad 0 \in i(\sim_3 A) \text{ sii } 1 \in i(A)$$

$$1 \in i(\sim_2 A) \text{ sii } 0 \in i(A) \qquad 1 \in i(\sim_4 A) \text{ sii } 1 \notin i(A)$$
$$0 \in i(\sim_2 A) \text{ sii } 0 \notin i(A) \qquad 0 \in i(\sim_4 A) \text{ sii } 0 \notin i(A)$$

$\sim_1$ y $\sim_4$ son la negación de de Morgan y la booleana, respectivamente, así que usaremos la notación que introdujimos antes. (Vean los apéndices para el resto de casos claros que usaremos en esta presentación.)

Diremos que © es una *negación/conjunción/disyunción/implicación* si y sólo si hay un caso claro 🅭 de negación/conjunción/disyunción/implicación tal que

$$©(A_1, \ldots, A_n) \dashv\vDash 🅭(A_1, \ldots, A_n)$$

Ahora, diremos que © es *débilmente una negación/conjunción/disyunción/implicación* si y sólo si no es una negación/conjunción/disyunción/implicación pero hay al menos dos casos claros $🅭_x$ y $🅭_y$ de negación/conjunción/disyunción/implicación tales que

- $©(A_1, \ldots, A_n) \vDash 🅭_x(A_1, \ldots, A_n)$, y
- $🅭_y(A_1, \ldots, A_n) \vDash ©(A_1, \ldots, A_n)$

Finalmente, diremos que © es *negacion/conjuncion/disyuncion/implicacion-osa* si y sólo si no es una negación/conjunción/disyunción/implicación (ni siquiera débilmente), pero hay al menos dos casos claros, $🅭_x$ y $🅭_y$, de negación/conjunción/disyunción/implicación tales que

- la condición de verdad (o de falsedad) de $\copyright$ es la misma que la de $\textcircled{cc}_x$, y
- $\copyright(A_1, \ldots, A_n) \models \textcircled{cc}_y(A_1, \ldots, A_n)$

Resultados:

- $\sim_R A$ no es una negación, ni siquiera débilmente, y no es negacionosa. (Supongamos que la interpretación de A es $\{1\}$.)
- $\sim_K A$ es una negación, pues es consecuencia de, y tiene como consecuencia a, $\sim A$ y $\sim_2 A$.
- $A \to_{DF} B$ no es una implicación, ni siquiera débilmente. (Consideren que la interpretación de A es $\{\ \}$ y la de B es $\{1\}$.) $\to_{DF}$ es implicacionosa pues tiene la condición de falsedad de un caso claro de implicación y tiene como consecuencias lógicas a todas las implicaciones $A \to_1 B$—$A \to_4 B$ y $A \to_9 B$—$A \to_{12} B$.
- $A \to_W B$ is a conditional, as it entails, and is entailed by, $A \to_9 B$, $A \to_{10} B$, $A \to_{11} B$ and $A \to_{12} B$.

Resumiendo:

$\copyright$	Es la conectiva pretendida	Lo es débilmente	Es pretendidosa
$\sim_R$	$\times$	$\times$	$\times$
$\sim_K$	$\checkmark$	$\times$	$\times$
$\to_{DF}$	$\times$	$\times$	$\checkmark$
$\to_W$	$\checkmark$	$\times$	$\times$

Esta estrategia, con las definiciones recién adoptadas, hace que los tipos de conectivas no sean mutuamente excluyentes. $A \to_{DF} B$, además de ser condicionalosa, es una conjunción. (Ejercicio para la audiencia.) Este resultado hace muy felices a Hitoshi Omori y a Elisángela Ramírez Cámara.

5 Tomemos en serio las conectivas lógicas no clásicas

Pero les opositores de $A \to_{DF} B$ no tienen la batalla ganada. (De hecho, en "Non-conditional contracting connectives", Elisángela me ayudó a desarrollar ideas para por lo menos empatar el marcador.)

Comparemos

"$A \to_{DF} B$ no es un buen condicional porque no *internaliza* las propiedades de la consecuencia lógica (tarskiana)."

vs.

"La consecuencia lógica tarskiana no es una buena noción de consecuencia lógica para $A \to_{DF} B$ porque aquella no *exterioriza* las propiedades de éste."

También podemos obtener "casos claros" de consecuencia lógica. **Ejemplo: Consecuencia ST.** un argumento es lógicamente válido si y sólo si, para toda interpretación, si las premisas son verdaderas, la conclusión no es falsa.

Con este tipo de consecuencia lógica, $A \rightarrow_{DF} B$ es un condicional y $\sim_R A$ es al menos débilmente una negación. (Y los tipos de conectivas siguen sin ser excluyentes.)

(Aquí también hay muchísimo más que decir; tal vez en un trabajo futuro con Ricardo o María.)

Apéndice I. Casos claros: condiciones de evaluación

Implicación

$1 \in (A \rightarrow_1 B)$ sii $0 \in i(A)$ ó $1 \in i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_1 B)$ sii $1 \in i(A)$ y $0 \in i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_2 B)$ sii $0 \in i(A)$ ó $1 \in i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_2 B)$ sii $1 \in i(A)$ y $1 \notin i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_3 B)$ sii $0 \in i(A)$ ó $1 \in i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_3 B)$ sii $0 \notin i(A)$ y $0 \in i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_4 B)$ sii $0 \in i(A)$ ó $1 \in i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_4 B)$ sii $0 \notin i(A)$ y $1 \notin i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_5 B)$ sii $0 \in i(A)$ ó $0 \notin i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_5 B)$ sii $1 \in i(A)$ y $0 \in i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_6 B)$ sii $0 \in i(A)$ ó $0 \notin i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_6 B)$ sii $1 \in i(A)$ y $1 \notin i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_7 B)$ sii $0 \in i(A)$ ó $0 \notin i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_7 B)$ sii $0 \notin i(A)$ y $0 \in i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_8 B)$ sii $0 \in i(A)$ ó $0 \notin i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_8 B)$ sii $0 \notin i(A)$ y $1 \notin i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_9 B)$ sii $1 \notin i(A)$ ó $1 \in i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_9 B)$ sii $1 \in i(A)$ y $0 \in i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_{10} B)$ sii $1 \notin i(A)$ ó $1 \in i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_{10} B)$ sii $1 \in i(A)$ y $1 \notin i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_{11} B)$ sii $1 \notin i(A)$ ó $1 \in i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_{11} B)$ sii $0 \notin i(A)$ y $0 \in i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_{12} B)$ sii $1 \notin i(A)$ ó $1 \in i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_{12} B)$ sii $0 \notin i(A)$ y $1 \notin i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_{13} B)$ sii $1 \notin i(A)$ ó $0 \notin i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_{13} B)$ sii $1 \in i(A)$ y $0 \in i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_{14} B)$ sii $1 \notin i(A)$ ó $0 \notin i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_{14} B)$ sii $1 \in i(A)$ y $1 \notin i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_{15} B)$ sii $1 \notin i(A)$ ó $0 \notin i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_{15} B)$ sii $0 \notin i(A)$ y $0 \in i(B)$

$1 \in (A \rightarrow_{16} B)$ sii $1 \notin i(A)$ ó $0 \notin i(B)$
$0 \in i(A \rightarrow_{16} B)$ sii $0 \notin i(A)$ y $1 \notin i(B)$

Apéndice II. Casos claros: tablas

Negación

$\sim_1 A$	$\sim_2 A$	$\sim_3 A$	$\sim_4 A$	A
{0}	{0}	{0}	{0}	{1}
{1,0}	{1}	{0}	{ }	{1,0}
{ }	{0}	{1}	{1,0}	{ }
{1}	{1}	{1}	{1}	{0}

Implicación

$A \to_1 B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1,0}	{1}	{1,0}	{1}	{1,0}
{ }	{1}	{1}	{ }	{ }
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_2 B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{1}	{0}	{0}
{1,0}	{1}	{1}	{1,0}	{1,0}
{ }	{1}	{1}	{ }	{ }
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_3 B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1,0}	{1}	{1}	{1}	{1}
{ }	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_4 B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{1}	{0}	{0}
{1,0}	{1}	{1}	{1}	{1}
{ }	{1}	{1}	{0}	{0}
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_5 B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{0}	{1}	{0}
{1,0}	{1}	{1,0}	{1}	{1,0}
{ }	{1}	{ }	{1}	{ }
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_6 B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{ }	{1,0}	{0}
{1,0}	{1}	{1}	{1,0}	{1,0}
{ }	{1}	{ }	{1}	{ }
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_7 B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{0}	{1}	{0}
{1,0}	{1}	{1}	{1}	{1}
{ }	{1}	{0}	{1}	{0}
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_8 B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{ }	{1,0}	{0}
{1,0}	{1}	{1}	{1}	{1}
{ }	{1}	{ }	{1,0}	{0}
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_9 B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1,0}	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{ }	{1}	{1}	{1}	{1}
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_{10} B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{1}	{0}	{0}
{1,0}	{1}	{1}	{0}	{0}
{ }	{1}	{1}	{1}	{1}
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_{11} B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1,0}	{1}	{1}	{ }	{ }
{ }	{1}	{1,0}	{1}	{1,0}
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_{12} B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{1}	{0}	{0}
{1,0}	{1}	{1}	{ }	{ }
{ }	{1}	{1}	{1,0}	{1,0}
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_{13} B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{0}	{1}	{0}
{1,0}	{1}	{0}	{1}	{0}
{ }	{1}	{1}	{1}	{1}
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_{14} B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{ }	{1,0}	{0}
{1,0}	{1}	{ }	{1,0}	{0}
{ }	{1}	{1}	{1}	{1}
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_{15} B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{0}	{1}	{0}
{1,0}	{1}	{ }	{1}	{ }
{ }	{1}	{1,0}	{1}	{1,0}
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}

$A \to_{16} B$	{1}	{1,0}	{ }	{0}
{1}	{1}	{ }	{1,0}	{0}
{1,0}	{1}	{ }	{1}	{ }
{ }	{1}	{1}	{1,0}	{1,0}
{0}	{1}	{1}	{1}	{1}