Conectivas y Forma Lógicas

Dr. Axel Arturo Barceló Aspeitia

Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM

1. Introducción

Desde practicamente los principios de mi carrera filosófica he estado muy interesado en el advenimiento de la lógica simbólica,[1] es decir, el paso de una lógica sin símbolos matemáticos a la lógica actual, cuyo lenguaje simbólico es eminentemente matemático.[2] Este paso me interesa tanto dentro de la historia de esta disciplina, como dentro de nuestra formación profesional como lógicos-filósofos (en contraste con lógicos-matemáticos o estudiantes de lógica dentro de disciplinas como la lingüística y las ciencias de la computación). En otras palabras, me interesa tanto el proceso histórico sucedido durante el siglo XIX, en el que símbolos de tipo matemático se empezaron a utilizar en lógica, como el proceso educativo a través del cual –a veces, desde la preparatoria– aprendemos a usarlos nosotros mismos.[3] Como resultado de mis investigaciones en este último punto, he visto como ciertos descuidos o imprecisiones en la introducción de nociones fundamentales a los niveles más básicos de educación lógica se heredan como vicios o prejuicios teóricos más adelante en la práctica lógica profesional. Es dentro de este marco que se sitúa este texto. El objetivo de esta platica es exponer una ambigüedad filosóficamente significativa en el uso de los operadores lógicos como símbolos. Esta ambiguuedad es filosóficamente significativa porque corresponde a una ambigüedad en el uso general de formulas en lógica.

---

[1]. Podría decirse que la lógica siempre ha sido simbólica, ya que la silogística también utilizaba letras para simbólizar las partes y, mas importante, la forma lógica de argumentos. Sin embargo, mi interés es en la introducción de simbólos de tipo matemático en el estudio de la lógica. Este fenómeno es mucho más reciente.

[2]. No confundir con el paso de la lógica informal a la formal o de la no-matemática a la lógica matemática. Si bien estas son distinciones distintas, estudiar sus relaciones es tambien importante.

[3]. Sobre el primer punto, veáse mi tésis de licenciatura, *La Introducción del Cálculo Lógico en Frege* (FFyL, UNAM: 1993). Sobre el segundo, véase mi “La Introducción del Cálculo Proposicional” (Taller de Didáctica de la Lógica. Videoconferencia: 2001).

2. La Ambigüedad

Por principio de cuentas, podria preguntarse: si los operadores lógicos son símbolos, ¿qué simbolizan? Tradicionalmente, se dan dos respuestas a esta pregunta:

(i) Por un lado, estas constantes lógicas se conciben como símbolos de operaciones lógicas – de ahí su nombre de 'conectivas,' es decir, de cierto tipo de funciones lógicas. Se dice, por ejemplo, que el conectivo '¬' simboliza la operación de *negación*, la cual es una operación sobre oraciones. Mapea oraciones (o conjuntos ordenados de ellas) a otras. Por ejemplo, la operación de negación mapea la oración "lloverá mañana" al enunciado complejo "no lloverá mañana." Obedeciendo la ortodoxia matemática, el valor de aplicar una operación a un argumento se expresa anteponiéndole el símbolo de la operación. En el caso de la negación, la negación de un enunciado p queda expresado en la fórmula $\neg p$.

(ii) Por otro lado, los operadores lógicos se ven como constantes del lenguaje formal que simbolizan expresiones sincategoremáticas en el lenguaje natural. Por ejemplo, el ya mencionado '¬' simboliza, entre otras, a la partícula 'no.' De la misma manera, en lógica modal, la caja y el diamante simbolizan frases como 'es necesario (que)' y 'es posible (que)' respectivamente.

En lo que sigue argumentaré que la distinción entre (i) y (ii) no es filosóficamente inocua, sino que corresponde a dos sentidos de *forma lógica* (y, a su vez, dos objetivos del uso de símbolos matemáticos en la lógica) raramente distinguidos.

3. Simbolización y Forma Lógica

En lógica, es común hablar de, por ejemplo, enunciados de la forma $\neg p$, $\Box\,(p \wedge q)$ o cualquier otra fórmula de los diferentes lenguajes simbólicos de la lógica matemática. Se dice que estas formulas del lenguaje lógico simbólico expresan la *forma lógica* de enunciados del lenguaje natural. Esta es otra tesis poco controversial dentro de la ortodoxia lógica. Sin embargo, representa un problema para aquellos que quieran sostener (i) y (ii). El problema es: ¿qué rol juegan los operadores lógicos, como símbolos, en la expresión de la forma lógica de enunciados? (i) y (ii) tienen respuestas distintas a esta pregunta. De acuerdo con (i), un enunciado tiene la forma $\Diamond p$, por ejemplo, si es el resultado de aplicar la operación lógica de posibilidad al enunciado (simbolizado por) *p*. De acuerdo a (ii), en contraste, un enunciado tiene la mencionada forma si sus dos componentes lingüísticos son la frase modal 'Es posible (que)' (o una similar) y el enunciado (simbolizado por) *p*. Es tradicional, en la lógica simbólica, ver a los operadores lógicos de ambas maneras. Cuando se dice que enunciados como 'Es posible que llueva mañana" o "Posiblemente lloverá mañana" tienen la forma $\Diamond p$, se sostiene tanto que (i) tales enunciados son el resultado de aplicar el operador modal de posibilidad al enunciado "lloverá mañana" y que (ii) están compuestos de una frase modal como 'Es posible que' o 'Posiblemente' y el enunciado antes mencionado. Sin embargo, esta doble dimensión de los operadores lógicos no obedece los cánones matemáticos, y se basada en un confusión entre el uso y la mención de estos símbolos.

Veamos como surge esta confusión. Si los operadores simbolizan operaciones y éstas han de entenderse de la misma manera que operaciones en otros ámbitos de la matemática (es decir, si la lógica simbólica ha de ser considerada también *matemática*), entonces fórmulas como $\neg p$ o $\Diamond p$ deben de verse bajo la misma luz de otras expresiones matemáticas de la misma forma matemática, es decir, $f(a)$. Considere cualquier operación matemática *f* definida sobre un dominio D tal que *a* pertenezca a D. La fórmula $f(a)$ expresa la imagen de *a* bajo *f*. Sea cual sea el objeto representado por $f(a)$, uno no dice que *a* (o *f*, a decir verdad) *ocurre* en él. Tomemos un ejemplo muy sencillo: la adición de números naturales en la aritmética elemental. Esta operación aritmética se simboliza con el signo '+.' La suma de dos números naturales cualesquiera *n*, *m*, es decir, el resultado de aplicar la operación de adición a *n* y *m*, se expresa en la fórmula '$n + m$' – donde '*n*' y '*m*' son los numerales correspondientes a los números *n* y *m*. Hasta aquí, lo mismo sucede en la lógica matemática. La conjunción de dos oraciones cualesquiera *p* y *q*, es decir, el resultado de aplicar la operación de conjunción a *p* y *q*, se expresa en la fórmula '$p \wedge q$' – donde las letras '*p*' y '*q*' simbolizan los enunciados *p* y *q*, y el conectivo '^' simboliza la operación de conjunción, tal y como lo señala (i). Sin embargo, en el caso de la adición aritmética, no hay un correlato de (ii).

Tomemos un ejemplo concreto de adición aritmética. La expresión matemática '34 + 17' simboliza el resultado de aplicar la operación de adición a 34 y 17. Como la suma de 34 y 17 es 51, '34 + 17' representa al número 51.[4] Sin embargo, no tiene sentido decir que la operación matemática de adición o los números 34 y 17 ocurren en 51. En otras palabras, el operador de la suma '+', y los numerales '34' y '17' ocurren en '34 + 17', pero la operación de adición, y los números 34 y 17 no ocurren en 34 + 17, es decir, en 51. Sin embargo, cuando la lógica simbólica toma prestada de las matemáticas la noción de *operación*, olvida esto. Siguiendo con el caso de la conjunción en el cálculo de enunciados, se dice tanto que los símbolos '*p*', '*q*' y '^' ocurren en la expresión '$p \wedge q$' del lenguaje del cálculo, como que las expresiones simbolizadas por '*p*', '*q*' y '^' ocurren en la expresión del lenguaje ordinario simbolizada por '$p \wedge q$'. En otras palabras, se dice que *p*, *q* y ^ ocurren en $p \wedge q$. Es así como se comete una violación de la distinción entre uso y mención de las variables y los operadores lógicos.

Según (i), $\neg p$ simboliza la imagen de *p* bajo la operación lógica de negación, lo cual no implica que ésta se componga de ¬ y de *p*. Sin embargo, esto es lo que afirma (ii). Dependiendo de cómo se interprete el operadores lógico, ya sea como (i) simbolizando operaciones o como (ii) simbolizando frases lógicas sincategoremáticas, queda uno comprometido a que *p* ocurra o no dentro

---

[4]. Tradicionalmente, así es como se interpreta la ecuación 34 + 17 = 51: como diciendo que '34 + 17' y el numeral '51' son sinónimos. Las expresiones, en sí mismas, son diferentes en su forma, pero no en lo que simbolizan. En especia se distinguen por los símbolos que ocurren en ellas. El símbolo '+' y los numerales '34' y '17' ocurren en '34 + 17,' pero no en '51'. Al nivel de las expresiones, tiene sentido decir que el operador '+' ocurre en la expresión matemática '$n + m$', pero no que ocurre en cualquier expresión matemática de $n + m$.

de $\neg p$, $\Diamond p$, $p \wedge q$, etc. En el caso de los operadores modales, sostener la tesis de que el enunciado *p* ocurre en $\Diamond p$ o $\Box p$ enfrenta otra dificultad, ya que ignora la distinción entre enunciados en indicativo y subjuntivo.[5] Esta distinción no existe o no es muy clara en el caso de lenguajes como el inglés – tal vez el lenguaje más común en la lógica simbólica profesional. Pero, en español, es claro que los enunciados que ocurren en el contexto de frases modales como 'es necesario que' o 'es posible que' no son enunciados completos que podrían ocurrir solos sin transformación gramática. En consecuencia, no podrían llamarse oraciones y mucho menos podrían ser calificadas de verdaderas o falsas. No podrían considerarse (o sus contenidos) proposiciones en el sentido usual. Por ejemplo, es gramaticalmente correcto decir que "es posible que mañana llueva", pero no que "es posible que mañana lloverá." El enunciado "mañana lloverá" no ocurre en "es posible que mañana llueva", sino su contraparte subjuntiva "mañana llueva," la cual no es una oración completa.

Este es el problema. A continuación daré algunos indicios sobre posibles vías de solución y/o disolución del dilema y mostraré como se conecta con la pregunta mas profunda: ¿qué es la forma lógica de un enunciado?

4. Posibles Soluciones

Si sostener (i) y (ii) –al mismo tiempo– es inconsistente con el uso normal de símbolos en matemáticas e ignora ciertas distinciones importantes del lenguaje natural, tal vez debería de verse, no como una ambigüedad, sino como un dilema: ¿son los operadores lógicos símbolos de operaciones lógicos o de frases del lenguaje natural? Sin embargo, la lógica contemporánea está

[5]. Esta distinción, aunque gramática, es lógicamente importante porque se corresponede con la distinción lógica entre proposiciónes *fácticas* y *epistémicas*, la cual es esencial para el estudio de actitudes proposicionales. Comúnmente, las actitudes proposicionales se dividen en *epistémicas* y *factuales* dependiendo del tipo de proposiciones que toman como objeto. Las actitudes mas comúnes –como creencia, orgullo, y la mayoría de las actitudes emotivas– son factuales. Toman proposiciones factuales (no confundir con *fácticas*, es decir, proposiciones verdaderas *de hecho*), como sus objetos. Estas proposiciones se expresan en enunciados en indicativo. Es correcto decir que uno cree que mañana lloverá, pero no que cree que mañana llueva. Sin embargo, hay también actitutdes epistémicas –como el deseo, el

construida sobre ambos pilares. Como dijimos con anterioridad, la naturaleza matemática de la lógica se la debemos a (i), mientras que (ii) la vincula con la tradición lógica, desde Aristóteles, y garantiza su aplicabilidad a argumentos del lenguaje natural. Es necesario, entonces conciliar ambas opciones dándo solución al aparente dilema. Esto se podría lograr, ya sea:

(1) Sosteniendo que la distinción gramática entre un enunciado solo, en indicativo, y su contraparte subjuntiva dentro de un contexto modal no tiene la menor relevancia lógica. Por ejemplo, podría decirse que la diferencia gramatical entre las expresiones "mañana lloverá" y "(que) llueva mañana" no es logicamente significativa. Pese a sus diferencias gramáticas las dos oraciones siguen siendo (o conteniendo) la misma proposición. La susodicha peculiaridad gramática del español y lenguajes similares es logicamente irrelevante, de tal manera que no hay razón alguna para decir que *p* no es un enunciado completo, y por lo tanto, verdadero o falso, cuando ocurre en un contexto modal. Esta solución podría generalizarse diciendo que diferentes ocurrencias del la misma expresión pueden tomar diferentes formas gramaticales sin cambiar su carácter lógico. De esta manera, cada elemento de la fórmula sigue correspondiendo a una expresión componente del enucniado cuya forma lógica es expresada por la fórmula.

(2) O bien, reconociendo el significado lógico de esta distinción y tratando de darle una explicación dentro de nuestra teoría lógica. Esto requeriría explicar la relación lógica entre enunciados indicativos y su contraparte subjuntiva. Esta distinción podría terminar siendo similar a la que existe entre las fórmulas abiertas y cerradas dentro de la lógica de primer orden. Podrían tomarse a las frases sentenciales (ya que no podríamos llamarlas enunciados propiamente) que ocurren en contextos modales como expresiones

---

temor, etc.– que toman proposiciones epistémicas, expresadas en subjuntivo, como sus objetos. En estos casos es correcto decir que uno desea que mañana llueva, pero no que mañana lloverá.

abiertas o incompletas. Así, “(que) llueva manana” sería un enunciado incompleto, distinto al enucniado completo “mañana lloverá”, aunque logicamente relacionado con él. Aún así, sería necesario dar una teoría lógica de su rol lógico. En particular, sería necesario dar explicación a su relación con los enunciados completos o cerrados propiamente dichos.

(3) Finamente, podría uno optar por mantener (ii) pero rechazar la interpretación de *ocurrencia* presentada anteriormente. Podemos entender la composición de expresiones representada en la fórma lógica de un enunciado no como un mero *agregado* de sus componentes. Es decir, podemos decir que los constituyentes lógicos de un enunciado no son literalmente sus *partes*. De tal manera que los constituyentes lógicos de un enunciado *ocurren* en su compuesto sólo en un sentido *lógico* por especificar.

Respecto a esta última opción, Frege mismo reconoció el error en interpretar la *ocurrencia lógica* de expresiones dentro de otras como la “relación entre un cuerpo físico y sus partes” [*Grundlagen* §9, p. 13]. En sus *Grundlagen*, escribió:

> Sin duda podemos hablar aún aquí de ‘partes’; pero entonces estamos usando la palabra no en su sentido físico o geométrico, sino en su sentido lógico, como lo hacemos cuando hablamos de los tiranicidios como partes del homicidio en general. Este es un caso de subordinación lógica. [*Ibidem*]

La respuesta de Frege supone que toda oración pose una única contrucción lógica la cual, en sus constituyentes últimos, llega hasta la expresiones primitivas mas básicas. Cada construcción de ese tipo determina un orden de expresiones. Este órden se expresa en la forma lógica del enunciado, de tal manera que cada símbolo de la formula corresponde a una expresión primitiva, y cada sub-fórmula corresponde a un paso en la construcción del enunciado cuya forma lógica la fórmula expresa. En este sentido, estas expresiones no occuren de verdad en el enunciado mismo, sino en su construcción (lógica). Por ejemplo, una proposición tiene la forma $\neg p$, si fue construída a partir de una expresión negativa primitiva (correspondiente al operador '¬') y el enunciado representado por *p* (de acuerda las reglas de su sintáxis). La construcción, a su vez, puede involucrar transformaciones de tal tipo que una o ambas de estas expresiones terminen no apareciendo como *partes* de la expresión final. Sin embargo, uno puede seguir hablando de ellas como sus constituyentes lógicas. Por ejemplo, el paso de 'Mañana lloverá" a "Es posible que mañana llueva" involucra, no sólo la incorporación del componente modal "es posible que", sino también la transformación gramática de "Mañana lloverá" a "mañana llueva." Es por eso que "mañana lloverá" no es parte de "Es posible que mañana llueva" y, sin embargo, si es uno de sus constituyentes lógicos, tal y como lo indica su forma lógica.

Ahora bien, si los elementos simbólicos que componen las fórmulas de nuestros cálculos lógicos no simbolizan partes del enunciado, ¿cuál es su relación con ellas? La respuesta es sencilla. Tradicionalmente, expresiones como 'no,' 'posiblemente,' 'solo si,' etc. se llaman también *indicadores de forma lógica.* Esto se debe a que, cuando simbolizamos un enunciado del lenguaje natural, no simbolizamos sus partes linguisticas, sino que estas partes nos sirven como indicadores de la forma lógica del enunciado. Pero, a fin de cuentas, esta última es la que se expresa en la fórmula. La ocurrencia de la frase 'probablemente'dentro de un enunciado, por ejemplo, sirve de marca para indicarnos que, la construcción lógica de ese enunciado incluye una aplicación de la operación de probabilidad. En este sentido, puede decirse que la frase 'probablemente' es la huella que dejó la aplicación de la operación dentro de la construcción lógica del enunciado. En general, podria decirse, entonces, que las partes del enunciado son las huellas que deja en él su proceso de construcción. De la misma manera, al nivel simbólico, los símbolos lógicos sirven una función análoga . Por ejemplo, la ocurrencia del operador '◊' dentro de una fórmula indica que la construcción del enunciado cuya forma lógica éstaexpresa incluye una aplicación de la operción de posibilidad.

De esta manera, podemos explicar la relación entre operadores lógicos, operaciones lógicos y frases lógicas sincategoremáticas del lenguaje natural sin caer en las sobre-simplificaciones de la opción tradicional ingenua. De esta manera, es posible tanto tomar en serio las diferencias gramaticales del lenguaje natural, como coinciliar las interpretaciones (i) y (ii) del rol de los operadores lógicos en la expresión de la forma lógica de enunciados del lenguaje natural. Y esto se logra, tan solo a través de una interpetación constructiva de la noción de *ocurrencia* lógica.

Dr. Axel Arturo Barceló Aspeitia

Instituto de Investigaciones Filosoficas
Universidad Nacional Autonoma de Mexico
Mexico Distrito Federal
(52)5622 7213
abarcelo@minerva.filosoficas.unam.mx