Sobre el teorema de la deducción

José Alfredo Amor Montaño

La teoría formal L para la lógica de proposiciones tiene como conjunto de símbolos primitivos al conjunto $S = \{\neg, \rightarrow\} \cup \{(,)\} \cup \{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, de conectivos primitivos, símbolos auxiliares y letras proposicionales respectivamente.

Se conoce el concepto de fórmula bien formada (fbf) y los conceptos de axioma, demostración, teorema, deducción, regla de inferencia, etc. Para el sistema L, si φ, ψ, χ son fbf entonces son axiomas de L:

(A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

(A2) $\big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\big) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\big)$

(A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \big((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi\big)$

Es decir, (A1), (A2) y (A3) representan esquemas de axiomas. Cada instancia de (A1) es un axioma, o sea, hay una infinidad de axiomas de la forma (A1), lo mismo para los esquemas (A2) y (A3). La única regla de inferencia de L es *modus ponens* (MP).
Si φ, ψ son fbf:
$(\varphi \wedge \psi)$ es una abreviatura para $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$
$(\varphi \vee \psi)$ es una abreviatura para $\neg\varphi \rightarrow \psi$
$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ es una abreviatura para $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
Es claro pues que $\wedge, \vee, \leftrightarrow$, son términos definidos a partir de los indefinidos primitivos $\neg, \rightarrow$.

Una deducción formal de la fórmula φ es una sucesión finita $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ de fbf de L donde cada una de ellas es o un axioma o consecuencia de fórmulas anteriores en la sucesión por la aplicación de MP y donde la última fórmula de la lista es φ. Para indicar que una fbf φ *es deducible en la teoría formal* L, escribimos $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi$; φ también recibe el nombre de *teorema formal de* L. La deducción formal que existe, de la cual φ es la última fbf se llama una *deducción de* φ. Por ejemplo, la siguiente es una deducción en L de $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$, donde φ es cualquier fbf:

$$
\begin{array}{ll}
1.[\neg\varphi \to \big((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi\big)] & \\
\quad \to [\big(\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\varphi)\big) \to (\neg\varphi \to \neg\varphi)] & \text{Axioma (A2)} \\
2.\neg\varphi \to \big((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi\big) & \text{Axioma (A1)} \\
3.\big(\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\varphi)\big) \to (\neg\varphi \to \neg\varphi) & \text{MP 1,2} \\
4.\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\varphi) & \text{Axioma (A1)} \\
5.\neg\varphi \to \neg\varphi & \text{Teorema formal} \\
6.(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \big((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi\big) & \text{Axioma (A3)} \\
7.(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi & \text{MP 5,6}
\end{array}
$$

La columna derecha es lo que se llama *análisis de la deducción*. Ahí se indica la razón por la cual la fbf correspondiente se ha incluído en la sucesión de fbf de L; en particular en el análisis de esta deducción, tenemos que, por "Axioma (Ai)" entenderemos una *instancia del esquema axiomático* (Ai). Nótese que en este caso, la sucesión satisface la definición de deducción en L y por lo tanto la fbf $((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ es un teorema formal de L, esto es, $\vdash_{\mathrm{L}} (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$. Esta fórmula $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$, que es una tautología, es conocida como "*consequentia mirabilis*".

En ocasiones se suele efectuar deducciones de fórmulas a partir de un conjunto de hipótesis o supuestos adicionales que funcionan como si fuesen axiomas. Por ejemplo, podemos decir que en la teoría L, si tenemos dos fórmulas de la forma $\varphi \to \psi$ y φ respectivamente, de ellas podemos inferir la fórmula ψ, que es consecuencia directa de ellas. Esto quiere decir que si suponemos que las fórmulas $\varphi \to \psi$ y φ son teoremas de L, entonces podemos deducir la fórmula ψ como teorema de L; esto lo expresamos simbólicamente como sigue: $\varphi \to \psi, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi$ (la fórmula ψ es deducible en L a partir de las hipótesis $\varphi \to \psi$ y φ).

Por ejemplo, si asumimos como hipótesis las fórmulas $(\varphi \to \psi)$, $(\psi \to \chi)$ y φ; a partir de ellas podemos deducir la fórmula χ:

$$
\begin{array}{ll}
1.\varphi \to \psi & \text{Hipótesis} \\
2.\psi \to \chi & \text{Hipótesis} \\
3.\varphi & \text{Hipótesis} \\
4.\psi & \text{MP 1,3} \\
5.\chi & \text{MP 2,4}
\end{array}
$$

Así, $(\varphi \to \psi), (\psi \to \chi), \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$.

En general una fbf ψ se dice que es consecuencia en L de un conjunto Γ de fbf de L si y sólo si hay una sucesión finita $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ tales que $\varphi_n = \psi$

y para cada i, $1 \leq i \leq n$, φ_i es o axioma, o $\varphi_i \in \Gamma$ o φ_i es consecuencia de anteriores fórmulas en la sucesión por MP. Tal sucesión se llama una *deducción formal de φ a partir de* Γ.

Ahora presentaremos un *metateorema* (teorema acerca de teoremas formales y deducciones formales), que expresa simbólicamente una forma de razonamiento que frecuentemente empleamos cuando discurrimos informalmente en matemáticas. El caso es el siguiente. Supongamos que deseamos probar un teorema de la forma “Si φ entonces ψ” en cierta teoría matemática. Por ejemplo, “Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$” en divisibilidad. Para establecer la implicación $\varphi \Rightarrow \psi$, suponemos que φ se cumple (hipótesis) y procedemos a deducir ψ a partir de φ. Este método también es aplicable cuando hay más de una hipótesis (en nuestro ejemplo hay dos hipótesis $a|b$ y $b|c$); al proceder así, de hecho lo que se hace es demostrar que a partir de φ es deducible ψ, más no se ha demostrado la proposición “$\varphi \Rightarrow \psi''$. Sin embargo, cuando hemos deducido ψ a partir de φ como hipótesis damos por resuelto el problema. El teorema que ahora demostramos justifica la validez de esta forma de proceder.

Lo anterior lo podemos simbolizar provisionalmente así: queremos demostrar que $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ y lo que en realidad procedemos a demostrar es que $\varphi \vdash \psi$ (en nuestro ejemplo queremos $\vdash_{\mathrm{TN}} (a|b \wedge b|c) \rightarrow (a|c)$ y procedemos a probar $a|b, b|c \vdash_{\mathrm{TN}} a|c$, en la Teoría de Números).

Teorema. *(Teorema de la Deducción)*
Si $\varphi \vdash \psi$ entonces $\vdash \varphi \rightarrow \psi$. En general si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m \vdash \psi$ entonces $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1} \vdash (\varphi_m \rightarrow \psi)$. O si se quiere, tomando $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ y $\varphi_m = \varphi$, si $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ entonces $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$.

El teorema nos dice que si tenemos una deducción de ψ a partir del conjunto de hipótesis $\Gamma \cup \{\varphi\}$ entonces existe (y además se puede construir) una deducción de la fbf $\varphi \rightarrow \psi$ a partir de Γ únicamente.

Definición. *La* longitud *de una deducción es el número de fbf en ella, es decir el número de fbf de la sucesión.*

Supongamos que $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ (con $\psi_n = \psi$) es la deducción que tenemos de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Demostraremos por inducción matemática sobre la longitud de dicha deducción que es posible encontrar (encontrándola) una deducción de $\varphi \rightarrow \psi$ a partir de Γ.

<u>Base inductiva.</u> Si la longitud de la deducción dada es uno, la única fbf de la sucesión ψ_1 sólo puede ser o φ o un elemento de Γ o un axioma. Si es φ, sabemos que $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \varphi$, por lo tanto $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \varphi$ (añadiendo las hipótesis Γ a la deducción de $\varphi \to \varphi$. Si $\psi_1 \in \Gamma$ o ψ_1 es axioma, entonces procedemos como sigue:

1.ψ_1	Hipótesis o axioma
2.$\psi_1 \to (\varphi \to \psi_1)$	Axioma (A1)
3.$\varphi \to \psi_1$	MP 1, 2

Añadiendo las hipótesis de Γ no usadas, tendremos que $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi_1$

<u>Paso inductivo.</u> Ahora demostraremos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_n$ se sigue de suponer que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_j$ para toda $j < n$ (hipótesis de inducción). Así pues, supondremos que hay una sucesión de fbf de L para cada ψ_j $(j < n)$ que constituyen una deducción de $\varphi \to \psi_j$ a partir de Γ:

$\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi_1$, $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi_2$, $\ldots$, $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi_{n-1}$. Ahora construiremos una deducción de $\varphi \to \psi_n$ apoyados en este supuesto. ψ_n puede ser de cuatro formas diferentes: puede ser φ o elemento de Γ, o axioma de L o consecuencia directa de fbf anteriores por modus ponens.

En los tres primeros casos se procede exactamente como en el caso para $n = 1$, para encontrar $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_n$, de tal modo que sólo nos resta examinar el caso en que ψ_n se obtiene por modus ponens de dos fórmulas anteriores en la sucesión original. En este caso ψ_n será consecuencia de dos fórmulas, ψ_k y $(\psi_k \to \psi_n)$ a las que se les aplicó MP para obtener ψ_n. Ahora bien, sabemos por hipótesis de inducción que hay una deducción a partir de Γ de $\varphi \to \psi_k$ y de $\varphi \to (\psi_k \to \psi_n)$ pues $k < n$, y si llamamos $\psi_r = \psi_k \to \psi_n$, $r < n$, concatenando las dos deducciones tendremos:

$$\left.\begin{array}{rl} 1. & \psi_1' \\ \vdots & \\ s. & \varphi \to \psi_k \end{array}\right\} \Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi_k$$

$$\left.\begin{array}{rl} s+1. & \psi_1'' \\ \vdots & \\ s+t. & \varphi \to (\psi_k \to \psi_n) \end{array}\right\} \Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to (\psi_k \to \psi_n)$$

$$\begin{array}{rll} s+t+1. & [\varphi \to (\psi_k \to \psi_n)] \to [(\varphi \to \psi_k) \to (\varphi \to \psi_n)] & \text{Axioma (A2)} \\ s+t+2. & (\varphi \to \psi_k) \to (\varphi \to \psi_n) & \text{MP}s+t, s+t+1 \\ s+t+3. & \varphi \to \psi_n & \text{MP s, s+t+2} \end{array}$$

En el renglón $s+t+1$. ponemos el axioma (A2) como se indica y procedemos aplicar MP dos veces, obteniendo el resultado deseado: $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi_n$

Pero es claro que en esta suceción construída, cada fbf es o axioma o elemento de Γ o consecuencia por MP de anteriores, por lo tanto es una deducción de $\varphi \to \psi_n$ a partir de Γ. ■

Veamos un ejemplo de deducción, si tomamos $\Gamma = \{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\}$ lo que hemos hecho es dar la deducción $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathrm{L}} \chi$, ahora, apoyándonos en esa deducción, construiremos una deducción de $\varphi \to \chi$ a partir de Γ unicamente, para ello procederemos como lo hemos hecho en la prueba del teorema de la deducción encontrando que $\varphi \to \psi_i$ para toda $i = 1, \ldots, s$ (longitud de la deducción). En este caso ψ_1 es $\varphi \to \psi$, ψ_2 es $\psi \to \chi$, ψ_3 es φ, y ψ_4 es ψ y ψ_5 es χ. Ver esa deducción en la página 2, abajo.

1. $\varphi \to \psi$	hipótesis
2. $(\varphi \to \psi) \to \big(\varphi \to (\varphi \to \psi)\big)$	axioma (A1)
3. $\varphi \to (\varphi \to \psi)$	MP 1,2
4. $\psi \to \chi$	hipótesis
5. $(\psi \to \chi) \to \big(\varphi \to (\psi \to \chi)\big)$	axioma (A1)
6. $\varphi \to (\psi \to \chi)$	MP 4,5
7. $[\varphi \to ([\varphi \to \varphi] \to \varphi)] \to [(\varphi \to [\varphi \to \varphi]) \to (\varphi \to \varphi)]$	axioma (A2)
8. $\varphi \to ([\varphi \to \varphi] \to \varphi)$	axioma (A1)
9. $(\varphi \to [\varphi \to \varphi]) \to (\varphi \to \varphi)$	MP 7,8
10. $\varphi \to [\varphi \to \varphi]$	axioma (A1)
11. $\varphi \to \varphi$	MP 9,10
12. $[\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$	axioma (A2)
13. $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	MP 6,12
14. $\varphi \to \chi$	MP 1,13

Podemos observar que las fórmulas 3, 6, 11 y 14 son las fórmulas $\varphi \to \psi_1$, $\varphi \to \psi_2$, $\varphi \to \psi_3$ y $\varphi \to \psi_5$ respectivamente. Esta es la deducción de $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \chi$.

Es importante hacer cuatro observaciones:

(a) En el lugar del renglón 12 deberíamos haber iniciado la deducción de $\varphi \to \psi_4$ que es $\varphi \to \psi$ pero nos damos cuenta que esta fórmula es una de nuestras hipótesis. Desde luego que un autómata lo hubiera hecho.

(b) La deducción de $\varphi \to \varphi$ ($\varphi \to \psi_3$) no fue utilizada en ningún momento y podíamos haberla omitido ¿por qué no se usó?.

(c) En la demostración del teorema de la deducción (en la construcción) sólo se hizo uso de los axiomas de la forma (A1) y (A2).

(d) Nótese que el número de pasos fue 14, pero según (a) nos ahorramos 3 pasos, si hubiésemos hecho la construcción completa (innecesaria en este caso, pero no en general) hubiésemos tenido un total de 17 pasos, o sea $3 \cdot 5 + 2$. ¿Es esto cierto siempre? o sea, si se hace la construcción completa de una deducción de n pasos dada, ¿se obtiene una nueva deducción de $3 \cdot n + 2$ pasos?