Introducción a la Lógica Intensional
Lógica Temporal Proposicional

Apuntes de Clase : Marzo 26, 2012
Dr. Axel Arturo Barceló Aspeitia

Tablas de Verdad

Las tablas de verdad son, por una parte, uno de los métodos más sencillos y conocidos de la lógica formal, pero la mismo tiempo también uno de los más poderosos y claros. Entender bien las tablas de verdad es, en gran medida, entender bien a la lógica formal misma. En esta sesión haremos algunas reflexiones alrededor de las tablas de verdad cómo pretexto

1. Los Métodos Sintáctico y Semántico en Lógica y Semántica

So hacemos caso a lo que Geoffrey Hunter dice en la introducción a su libro Metalogic (1971, 3), desde el punto de vista de la metalógica, los métodos sintácticos y semánticos de la lógica formal son métodos alternativos para detectar las verdades lógicas de un lenguaje.

Ambas parten del ideal de encontrar un método formal – es decir, uno que atienda sólo a la forma lógica de los enunciados, no a su contenido, y sea efectivo de manera mecánica (y, por lo tanto, a-priori) – para reconocer verdades lógicas. Sin embargo, parten de intuiciones distintas. El método de pruebas, fundado por Frege en su Conceptografía (1879), parte de la intuición de que el método formal a-priori por excelencia es la prueba matemática y trata de extender la noción de prueba formal estricta de las matemáticas a la lógica. El método semántico, por su parte, está fundado en el análisis lógico-semántico de por tablas de verdad propuesto por Ludwig Wittgenstein (1921) y Bertrand Russell (1918). Aunque dicho método de análisis era ya conocido en la tradición lógica-algebraica, y que Peirce (en notas no publicadas, anteriores a 1910) y Post (1920) habían utilizado ya tablas de verdad, fueron Russell y Wittgenstein los que divulgaron este método como instrumento de análisis del significado de los enunciados en términos de condiciones de verdad (en contraste con Frege, quién identificaba al significado – contenido conceptual – de los enunciados con su rol inferencial). Según Wittgenstein, el método de tablas de verdad sirve para determinar las condiciones de verdad de un enunciado, es decir, su significado, en función de las condiciones de verdad de sus elementos atómicos. En otras palabras, la tabla de verdad nos dice en qué situaciones el enunciado es verdadero y en cuales es falso. Esta idea evolucionó en la teoría de descripciones de estado de Carnap (1946) y, posteriormente, las teorías semánticas de mundos posibles de Prior (1956), S. Kanger (1957), Hintikka (1957, 1961) y Kripke (1963) y de situaciones de Barwise y Perry (1983) que siguen vigentes hasta la fecha.

Cómo los métodos de este tipo surgieron originalmente como método de análisis semántico, se les conoce como métodos semánticos. En contraste, el método de pruebas se conoce como sintáctico. Sin embargo, vale la pena mencionar que el método de pruebas también ha sido interpretado como un método de análisis semántico, pues hay quienes piensan que las reglas de inferencia pueden verse también como definiciones. Fundamentalmente, en su seminal artículo de (1935) G. Gentzen propuso que las reglas de inferencia del método de deducción natural se vieran como definiciones de los conectivos lógicos. Aquellos que utilizan el método de pruebas como instrumento de análisis semántico, como Gilbert Harman (1986, 1987) y Robert Brandom (2000), entre otros, se llaman a sí mismos inferencialistas, funcionalistas o teóricos del rol conceptual. Aquellos que prefieren teorías del significado más cercanas a la propuesta de Wittgenstein, son conocidos como representacionalistas, pues los métodos semánticos que usan pueden interpretarse como involucrando algún elemento que representa al mundo. En el método de tablas de verdad, por ejemplo, los distintos renglones pueden verse como representando diferentes maneras en que el mundo pudo haber sido. En contraste, es claro que en el método de pruebas formales no hay ningún elemento que represente ningún aspecto del mundo o cosa parecida.

Los métodos sintáctico y semántico no sólo son métodos formales distintos, que parten de intuiciones metodológicas distintas, sino que también tratan de capturar las nociones de consecuencia, validez y verdad lógicas de manera distinta. Desde la perspectiva sintáctica, por ejemplo, una proposición *p* es lógicamente verdadera sii es posible determinar la verdad de p sin apelar en lo absoluto al mundo; mientras que desde la perspectiva semántica, *p* es lógicamente verdadera sii fuera verdadera de cualquier manera como fuera el mundo, p sería verdadera (p es verdadera en todo mundo posible). De esta manera, los modelos sintácticos acentúan el carácter apriori de la lógica y los métodos semánticos, su necesidad. Por eso, los métodos semánticos – como las tablas de verdad – funciona a través de lo que se ha llamado el **método de variación**, en el cual es necesario contar con un aparato para representar todas las maneras en que el mundo puede ser, y verificar si en cada una de ellas, el enunciado es verdadero (por ejemplo, en cálculo proposicional, ver si en toda asignación de valores de verdad a las variables proposicionales, es decir, en todo renglón de la tabla de verdad, el enunciado es verdadero).[1]

2. Tablas de Verdad y Condiciones Necesarias y Suficientes de la Verdad

Varios métodos de prueba del cálculo proposicional, entre ellos el de tablas de verdad, se basan en una concepción muy tradicional del análisis lógico, según la cual el objetivo de éste es determinar las condiciones necesarias y suficientes de la verdad de una proposición o enunciado. Cada renglón de la tabla que hace verdadero al enunciado en cuestión determina una condición suficiente para su verdad. En cada renglón, los valores asignados a cada variable proposicional determinan una condición necesaria del renglón. Pongamos un ejemplo. Supongamos que queremos hacer la tabla de verdad del siguiente enunciado:

(1) Si tu hermana no pasa el examen, estarás en graves problemas.

Como primer paso, identificamos las proposiciones atómicas y les asignamos una variable:

P: Tu hermana pasa el examen

Q: Estarás en graves problemas

---

1. Etchemendy (1990), McGee (1992) y otros han argumentado que tal vez esta no sea la mejor manera de capturar la noción de necesidad lógica y, por lo tanto, tampoco la de verdad lógica. Pero lo importante para nuestra presentación es que, no por simplemente apelar a representaciones del mundo, los métodos semánticos pierden su carácter formal y dejan de ser a-priori o analíticos

De esta manera, podemos formalizar (15) como (~P)⇒Q y construir su tabla de la siguiente manera:

P	*Q*	*(~P)⇒Q*
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

¿Qué es lo que nos dice el primer renglón de la tabla? Nos dice que si P y Q son ambos verdaderos, (~P)⇒Q también lo es. En otras palabras, basta que "Tu hermana pasa el examen" y "Estarás en graves problemas" sean verdaderos para que "Si tu hermana no pasa el examen, estarás en graves problemas" sea verdadero. Es decir, la (condición) suficiente para que (17) sea verdadero implica que tu hermana pase el examen y tú estés en problemas en el futuro. Lo mismo sucede con cada uno de los tres primeros renglones de la tabla (los que hacen verdaderos a (~P)⇒Q). Basta que P sea verdadero y Q falso o que P sea falso y Q verdadero para que (~P)⇒Q sea verdadero.

Si analizamos cada renglón, veremos que el valor asignado a cada columna es una condición necesaria de cada renglón. Cuando consideramos el tercer renglón, por ejemplo, y decimos que es condición suficiente para que (1) sea verdad que tú hermana no pase el examen –es decir, que P sea falsa– y que tengas graves problemas –es decir, que Q sea verdadera–; cada uno de los dos es necesario para que se dé la condición suficiente. No basta que tu hermana no pase el examen, también es necesario que tú estés en graves problemas si tu hermana no pasa el examen. Es por ello que cada renglón se lee de manera conjuntiva y el enunciado para analizar es equivalente a la disyunción de cada uno de los renglones de la tabla que lo hacen verdadero. Esto es lo que hacemos explícito en las formas normales disyuntivas. En nuestro ejemplo, el primer renglón corresponde a la conjunción P&Q, el segundo a P&Q y el tercero a (~P)&Q (no incluimos el cuarto, pues no hace verdadera la fórmula). La disyunción de estas tres conjunciones es la forma normal disyuntiva de (15):

((~P)⇒Q) ⇔ ((P&Q) v (P&Q) v ((~P)&Q))

La forma normal conjuntiva también resulta de concebir la tabla de verdad como un análisis clásico. En este caso, sin embargo, los renglones relevantes son los que hacen falso al enunciado para analizar. Como este tipo de análisis es el dual del análisis anterior, todas las operaciones lógicas se invierten. A cada renglón le corresponde una disyunción en vez de una conjunción, y cada conyunto es el opuesto de su correspondiente en el análisis anterior. Por ejemplo, ya vimos que si da verdadero para la fórmula final, al tercer renglón de la tabla de dos variables (P y Q), le corresponde la conjunción $((\sim P)\&Q))$. Por dualidad, si diera falso, le correspondería la disyunción $(P v(\sim Q))$. Finalmente, en vez de una disyunción de las conjunciones correspondientes a los renglones que dan verdadero, la forma normal conjuntiva resulta de la conjunción de las disyunciones correspondientes a cada renglón que da falso. En el caso de (15), sólo hay un renglón, así que la forma normal conjuntiva correspondiente tendría un solo conyunto: la disyunción correspondiente al cuarto renglón.

$$((\sim P)\Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$$

Por lo menos en el caso de las conectivas extensionales, las tablas de verdad y las reglas de inferencia (de introducción y eliminación) de un conectivo son equivalentes y es fácil demostrarlo. Basta definir la inferencia lógica (el concepto clave en las reglas de inferencia) en términos de condiciones de verdad (el concepto clave en las tablas de verdad). Así, decir que una proposición implica a otra equivale a decir que la primera no puede ser verdadera, sin la otra serlo también; en otras palabras, para cualquier circunstancia de evaluación, si la primera es verdadera, la segunda también lo es. Bajo esta equivalencia, se puede demostrar fácilmente que las reglas de introducción y eliminación de los conectivos extensionales contienen la misma información sobre el significado de los conectivos lógicos que las funciones de verdad. En el caso de la conjunción, por ejemplo, las reglas de introducción y eliminación dirían que, en cualquier circunstancia de evaluación:

(Introducción) Si S_1 y S_2 son verdaderos, también lo es $S_1\&S_2$.

(Eliminación) $S_1\&S_2$ es verdadero sólo si S_1 y S_2 son ambos verdaderos.

En conjunto, las reglas dicen que $S_1\&S_2$ es verdadero si y sólo si S_1 y S_2 son ambos verdaderos, que es exactamente lo mismo que dice la tabla de verdad de la conjunción.

3. ¿Qué es una tabla de verdad?

Fundamentalmente, una tabla de verdad es un dispositivo para demostrar ciertas propiedades lógicas y semánticas de enunciados del lenguaje natural o de fórmulas del lenguaje del cálculo proposicional:

- Sin son tautológicas, contradictorias o contingentes
- Cuáles son sus condiciones de verdad
- Cuál es su rol inferencial, es decir, cuáles son sus conclusiones lógicas y de qué otras proposiciones se siguen lógicamente

El procedimiento para construir una tabla de verdad es sencillo y relativamente mecánico; en esta plática, asumiré que todos saben ya cómo hacer una tabla de verdad para cualquier fórmula del cálculo proposicional clásico. Para aplicar el método de tablas de verdad a un enunciado o proposición, por lo tanto, es necesario primero simbolizarlo, es decir, determinar qué fórmula del lenguaje proposicional muestra su forma lógica y, luego, elaborar la tabla de verdad de dicha formula.

Si al aplicar el método de tablas de verdad encontramos que una fórmula es tautológica, presumimos que ella es una verdad lógica del cálculo proposicional es decir que es lógicamente válida, lógicamente verdadera o verdadera con necesidad lógica. Por lo tanto, el uso de las tablas de verdad como métodos para demostrar que algo es lógicamente necesario presupone ciertas tesis sobre la verdad y la necesidad lógicas. Cada uno de los pasos y cada una de las características de las tablas de verdad representa una tesis lógica sustancial.

Tomemos por ejemplo, el popular principio de que toda tabla tiene 2^n renglones, dónde la n corresponde al número de variables proposicionales (también conocidas como "letras proposicionales") que aparecen en la fórmula. Una fórmula de 3 variables proposicionales, por ejemplo, tendría $2^3=8$ renglones. Pero ¿por qué es esto? La respuesta más directa es que ése es el número de combinaciones que existen de asignaciones de valores de verdad a cada una de las variables. En otras palabras, porque si asignamos a cada variable uno de los dos valores de verdad – verdadero o falso –, las posibles combinaciones son exactamente ocho, ni más, ni menos. Si bien es una verdad matemática indudable que la combinatoria de dos valores a n número de variables es 2^n, para que este principio valga como principio lógico dentro de una demostración lógica – que, a fin de cuentas es lo que una tabla de verdad es –, es necesario que ciertas cosas sean verdaderas: Por ejemplo, entre otras cosas, es necesario que para determinar que una fórmula sea tautológica baste tomar en cuenta sólo cuál es el posible valor de verdad que tome la interpretación de sus variables proposicionales. También es necesario que se requieran considerar todas las posibles interpretaciones de las variables. Además, es necesario que a cada asignación de valores a las variables les corresponda uno y sólo un renglón. También es necesario que los valores de verdad sean dos – verdadero o falso. Si los valores de verdad fueran más, o fueran menos, las combinaciones posibles serían otras: más renglones si son más valores, y menos renglones si fueran menos valores. Además, el número de renglones a considerar también cambiaría si en cada renglón cada variable proposicional pudiera tener, no un sólo valor determinado, sino dos (o más) o ninguno. Las así-llamadas **lógicas no-clásicas** surgen precisamente de cuestionar y cambiar algunos de estos presupuestos de las tablas de verdad clásicas, dando pie así a un tipo de tablas de verdad no-clásicas.

El principio que pone en cuestión la lógica multivalente, por ejemplo, es el principio de que la interpretación de toda variable proposicional no puede tener sino uno de los dos valores de verdad: verdadero y falso. A este principio se le conoce comúnmente como bivalencia y junto con el principio de no-contradicción ha sido considerado uno de los principios lógicos básicos. Los métodos semánticos de las lógicas intensionales, por su parte, surge de cuestionar otro principio lógico básico: el de que es necesario considerar todas las posibles interpretaciones de las variables. Además de estas tablas, hay muchas otras tablas de verdad *raras*, de las cuales no hablaremos en clase, pero no pro ello quiero dejar de mencionar. Por ejemplo, hay tablas de verdad en las que los renglones se bifurcan en dos o más sub-renglones y son útiles para lo que en lógica llamamos *super-valuaciones.* También existen tablas con *n* valores y más de *2n* renglones, ¿cómo es posible? Pues porque, a diferencia de las tablas tradicionales, en estas tablas el orden de los renglones *sí* importa, de tal manera que renglones repetidos cuentan como renglones distintos.

4. Lógica Intensional y el Principio de Independencia Lógica

Como hemos visto, en clases básicas de lógica solemos aprender que una tabla de verdad tiene siempre 2^n renglones, dónde n es el número de ocurrencias de operadores lógicos en la fórmula o argumento que se esté simbolizando. Lo que comúnmente no se nos enseña es que, como bien señalo Wittgenstein ya en su Tractatus Logico-Philosophicus para que esto sea verdad, las variables deber simbolizar proposiciones atómicas o, por lo menos, lógicamente independientes entre sí (es decir, cada proposición simbolizada debe ser lógicamente independiente de las demás).

Para verificar que efectivamente estamos tratando con dos proposiciones independientes, A y B, es necesario que estas satisfagan cuatro condiciones:

> (i) A no debe seguirse de B, es decir, debe ser posible que A sea verdadero y B falso, y
>
> (ii) vice versa, B no debe seguirse de A, es decir, debe ser posible que B sea verdadero y A falso.
>
> (iii) La verdad de A debe ser compatible con la verdad de B, debe ser posible que tanto A como B sean ambos verdaderos al mismo tiempo, es decir, en la misma circunstancia.
>
> (iv) La falsedad de A debe ser compatible con la de B, debe ser posible que tanto A como B sean ambos falsos al mismo tiempo, es decir, en la misma circunstancia.

Cuando sólamente tenemos una proposición, ésta no debe ser necesariamente verdadera ni necesariamente falsa.

Si no se cumplen alguna de estas condiciones, entonces alguna de los renglones posibles de la tabla representara como posible un caso que no es realmente posible. Si A se sigue lógicamente de B, por ejemplo, entonces ya no es posible que A sea verdadera y B falsa. Por ello, el renglón que le asigna verdadero a A y falso a B no representa una posibilidad real. Es necesario, pro lo tanto, eliminarlo de la tabla.

El que una fórmula sea tautológica, contradictoria o contingente, depende por supuesto, de cuales son los renglones de la tabla en la que se evalúa. La misma fórmula puede ser contingente en una tabla, contradictoria en otra y tautológica en otra más, dependiendo de qué renglones tenga la tabla en cuestión. Hay formulas que siempre serán tautológicas o contradictorias, no importa en qué tablas las evaluemos. Estas son las tautologías y contradicciones que ya conocemos de nuestro cálculo proposicional. En otras palabras, si una fórmula es tautológica en la tabla de verdad tradicional de 2^n renglones, entonces será tautológica en cualquier otra tabla de verdad. Si una formula es verdadera en todos los renglones, no importa qué renglones eliminamos, seguirá siendo verdadera en todos ellos. Lo mismo sucede con las formulas que resultan contradictorias en las tablas de 2^n renglones: también son contradictorias en cualquier otra tabla. Por el contrario, si una fórmula es contingente en la tabla de 2^n renglones, entonces dependerá de qué renglones se incluyan o eliminen de la tabla para que sea contradictoria, tautológica o contingente.

Supongamos que queremos hacer la tabla de verdad del siguiente enunciado:

(2) Si tu hermano no hace el examen, no lo pasará.

Identificamos las proposiciones atómicas y les asignamos una variable:

P: Tu hermano hace el examen.

Q: Tu hermano pasará el examen.

De esta manera, podemos formalizar (2) como $(\sim P)\Rightarrow(\sim Q)$ y construir su tabla de la siguiente manera:

P	Q	$(\sim P)\Rightarrow(\sim Q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Sin embargo, hay algo extraño en el análisis que presenta esta tabla, ya que nos dice, entre otras cosas, que el enunciado sería falso si P fuera falso y Q verdadero, es decir, si tu hermano no hiciera el exámen y, sin embargo, lo pasará, ¡lo cual es imposible! Por eso es que pareciera que este renglón no debería de aparecer en la tabla, ya que no es una posibilidad sino una imposibilidad. Así pues, la tabla de verdad correcta debería ser algo así cómo:

P	Q	$(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$
V	V	V
V	F	V
F	F	V

Y ahora sí podemos ver que, en realidad, ¡el enunciado expresaba una tautología! Desde esta perspectiva, por lo tanto, las fórmulas no son tautológicas, contradictorias o contingentes en sí mismas, sino en una tabla, y qué tabla sea la adecuada para evaluar una formula no va a depender de la fórmula misma, sino de su interpretación, es decir, de qué proposiciones simboliza cada variable proposicional. Por ello, mucha gente dice que este tipo de tablas no respetan el principio según el cual las propiedades lógicas de una proposición, en particular si una proposición es tautológica o no, debe depender sólo de su forma, no de su interpretación particular.