Lógicas Multivaluadas

Apuntes de clase: Lógica Circular Tetravalente

Axel Arturo Barceló Aspeitia
abarcelo@filosoficas.unam.mx

Lógica Circular Tetravalente

1. Motivación para hacer Lógica Circular: No todos los círculos son iguales

Desde que surgieron las famosas paradojas de Russell y Cantor, la tradición en lógica ha sido prohibir la circularidad y la auto-referencia. Sin embargo, Aczel, Barwise y otros han mostrado que no todas las circularidades dan pie a paradojas y que la circularidad se puede introducir a la lógica.

Por ejemplo, consideren la siguiente fórmula infinita circular:

(1) (P&(Pv(P&(Pv(P&(Pv(P&(Pv(P&(Pv(P&(Pv(P&(Pv(P&(Pv…))))))))))))))))

En lógica clásica, esta fórmula no puede existir, pero intuitivamente podemos conocer bien sus condiciones de verdad (es decir, podríamos bien hacer su tabla de verdad) y conocer sus relaciones lógicas con otras fórmulas sin mayor problema. Como es una conjunción, basta que uno de sus conyuntos sea falso, para que toda la fórmula sea falsa. Esto significa que si P es falsa, toda la fórmula es falsa, y si el otro conyunto (Pv (P& (Pv (P& (Pv (P& (Pv (P& (Pv (P& (Pv (P& (Pv (P& (Pv…))))))))))))))) fuera falso, la fórmula total también lo sería. Ahora bien, para que este segundo conyunto sea falso, es necesario que los dos disyuntos sean falsos. En otras palabras, si alguno de los disyuntos fuera verdadero, toda la disyunción, aunque infinita, sería verdadera. De ahí se sigue que si P es verdadera, la disyunción sería verdadera y, por lo tanto, ambos conyuntos serían verdaderos y así toda la fórmula sería verdadera. En conclusión, si P es verdadera, toda la fórmula es verdadera y si P es falsa, la fórmula también es falsa. En consecuencia, esta fórmula es lógicamente equivalente a P y no hay nada paradójico en ella. Esto significa que no todas las circularidades lógicas dan pie a paradojas. No todos los círculos lógicos son viciosos. Algunos, cómo éste, son bien portados y, prima facie, no hay razón para excluirlos de nuestra lógica.

En otros casos, sin embargo, las cosas no son tan sencillas. Como ejemplo tomen la siguiente conjunción infinita:

(2) (P&(P&(P&(P&(P&(P&(P&(P&(P&(P&(P&…)))))))))))

Intuitivamente, la fórmula es (determinadamente) falsa si (y sólo si) P es falsa, pero ¿qué sucede si P es verdadera? La fórmula es una conjunción infinita, la cual es falsa si alguno de sus conyuntos es falso. De ahí que sea falsa si P es falsa. Sin embargo, si P es verdadera, es necesario que el otro conyunto sea también verdadero para que toda la fórmula sea verdadera. Pero este otro conyunto es la misma conjunción infinita, de ahí que nunca podamos excluir la posibilidad de que sea falso, ni determinar por completo que sea verdadero. Por lo tanto, cuando P es verdadera, la conjunción infinita es no es determinadamente verdadera, ni determinadamente falsa. En otras palabras, es indeterminada en el sentido de Lukaciewicz. Este tipo de fórmulas tienen condiciones de verdad raras, ya que están bien definidas de manera bivalente para ciertas asignaciones bivalentes de sus variables proposicionales, pero no para todas. Para estos otros casos, es necesario apelar a valores de verdad mas allá de (determinadamente) verdadero y (determinadamente) falso. A continuación, veremos otros dos ejemplos:

(3) Pv(Q&(Pv(Q&(Pv(Q&(Pv(Q&(Pv(Q&(Pv(Q&(Pv(Q&(Pv…))))))))))))))

Intuitivamente, si P es verdadera, toda la fórmula es verdadera; y si ambas P y Q son falsas, también lo es toda la fórmula. Sin embargo, ¿qué valor tiene la fórmula si P es falsa y Q verdadera? Una vez más, tenemos que apelar a lo indeterminado. Algo parecido sucede con el siguiente ejemplo:

(4) (P&(Qv(P&(Qv(P&(Qv(P&(Qv(P&(Qv(P&(Qv(P&(Qv…)))))))))))))))

Intuitivamente, si P es falsa, toda la fórmula es falsa; y si P y Q son ambas verdaderas, esta fórmula es también verdadera; pero ¿qué valor tiene la fórmula si es Q falsa y P verdadera? Para que toda la fórmula fuera verdadera, ambos conyuntos deben ser verdaderos, y como P es verdadero, también es necesario que el segundo conyunto (Qv (P& (Qv (P& (Qv (P& (Qv (P& (Qv (P& (Qv (P& (Qv…))))))))))))) sea también verdadero. Para que esta disyunción sea verdadera, es necesario que por lo menos un disyunto sea verdadero, como Q es falso, debe ser el otro disyunto (P& (Qv (P& (Qv (P& (Qv (P& (Qv (P& (Qv (P& (Qv (P& (Qv …))))))))))))))); y ahora hemos regresado a la fórmula inicial.

Para asignarle valores a estos extraños casos, es común usar una lógica polivalente. En particular, como hemos visto, el tercer valor indeterminado sirve muy bien para estos casos. Sin embargo, como veremos a continuación, vana a haber otros casos igualmente raros (en los que, a diferencia de los ejemplos que hemos visto hasta ahora, aparecerán la negación y la implicación material) en lo que el valor apropiado no será indeterminado, sino un cuarto valor. Nuestra lógica es tetravalente, por lo tanto, porque pensamos que no todos los casos raros son iguales.

2. Motivación para hacer Lógica Tetravalente: No todos los círculos son viciosos

Paradoja del Mentiroso: "Este enunciado es falso."

Paradoja de quién dice la verdad: "Este enunciado es verdadero."

Intuitivamente, ambos enunciados son circulares y raros en el sentido que hablábamos en la sección anterior. Sin embargo, no son raros de la misma manera. En el primer caso, el enunciado es paradójico porque si fuera falso, sería verdadero; y viceversa, si fuera verdadero, sería falso. En el segundo caso, más que paradójico el enunciado está indeterminado (en el sentido que ya hemos venido hablando desde Aristóteles y Lukaciewicz). No hay manera de determinar si es verdadero o falso. Puede ser verdadero tanto como puede ser falso. En el primer caso, en contraste, el enunciado no puede ser ni verdadero ni falso.

De esta intuición salen nuestros cuatro valores:

V = Verdadero (puede ser verdadero, pero no puede ser falso)

0 = Paradójico (no puede ser verdadero, ni puede ser falso)

I = Indeterminado (puede ser verdadero, pero también puede ser falso)

F = Falso (puede ser falso, pero no puede ser verdadero)

3. ¿Cómo escribir fórmulas circulares?

El primer problema para hacer lógica circular es encontrar una manera de escribir las fórmulas circulares. Hay muchas maneras de hacer esto, pero a mí me parece más sencillo usar sistemas de ecuaciones.

Por ejemplo, las cuatro fórmulas ya presentadas se escribirían así:

(1) $A = P \& A$

(2) $A = P \& B$
$B = P \vee A$

(3) $A = P \vee B$
$B = Q \& A$

(4) $A = P \& B$
$B = Q \vee A$

Donde A es la variable que representa la fórmula completa.

4. Tablas de Verdad Tetravalaente para Sistemas de Ecuaciones

Los renglones corresponden a las valuaciones bivalentes de las variables proposicionales.
Ejemplos:
(1)

P	A = P&A	A
V	A = A	I
F	A = F	F

(2)

P	A = P&B	B = PvA	A
V	A = B	B = V	V
F	A = F	B = A	F

(3)

P	Q	A = PvB	B = Q&A	A
V	V	A = V	B = A	V
V	F	A = V	B = F	V
F	V	A = B	B = A	I
F	F	A = B	B = F	F

(4)

P	Q	A = P&B	B = QvA	A
V	V	A = B	B = V	V
V	F	A = B	B = A	I
F	V	A = F	B = V	F
F	F	A = F	B = A	F

5. Paradojas

Hasta ahora hemos considerado solamente fórmulas circulares en las cuales sólo operaban disyunciones y conjunciones. Estas operaciones son muy nobles, porque con ellas nunca caeremos en paradojas. A lo más, será necesario de vez en cuando apelar al valor indeterminado. Sin embargo, una vez que introducimos la negación y la implicación material, las paradojas no tardan en asomar su cabeza. Después de todo, si recuerdan, lo que distinguía a la paradoja del mentiroso de la proposición del que dice la verdad es solamente la negación.

(5) Paradoja del Mentiroso: A = ~ A

(6) El que dice la Verdad: A = A

Es tentador simplemente excluir a la negación y la implicación material de la lógica circular. Una vez que tenemos una lógica trivalente como la que desarrollamos en la primera parte de este curso, podemos aplicarla (con todos sus problemas y sus logros)a este tipo de fórmulas. Así sabríamos que, por ejemplo, de

A = P v B

B = Q & A

se sigue lógicamente

A = P & B

B = Q v A

Sin embargo, una vez más, no toda fórmula circular con negación es paradójica. Por ejemplo:

(3) ~(P&(Pv(P&(Pv(P&(Pv(P&(Pv(P&(Pv(P&(Pv(P&(Pv…))))))))))

A = ~ B

B = P & C

C = P v B

P	Q	B = P&C	C = PvB	A = ~B
V	V	B = V	C = B	A = F
V	F	B = V	C = F	A = F
F	V	B = C	C = B	A = I
F	F	B = C	C = F	A = V

Esta fórmula tiene una negación y, sin embargo, puede hacérsele una tabla de verdad con sólo tres valores. Veamos otro ejemplo:

(4) (Pv((~P) v (Pv((~P) v (Pv((~P) v (Pv((~P) v (Pv((~P) v (Pv((~P) v…))))))

A = P v C

B = ~ P

C = B v A

P	A = P v C	B = ~P	C = B v A	A
V	A = V	B = F	C = A	V
F	A = C	B = V	C = V	V

Esta fórmula circular con negación, no sólo **no** es paradójica, sino que es una tautología.

Sin embargo, sí hay fórmulas que nos pueden dar un valor paradójico como resultado:

(5) (Pv(~(Pv(Pv(~(Pv(Pv(~(Pv(Pv(~(Pv(Pv(~(Pv(Pv(~(Pv…))))))))))))

A = P ∨ B

B = ~ C

C = P ∨ A

P	A = P ∨ B	B = ~C	C = P ∨ A	A
V	A = V	B = F	C = V	V
F	A = B	B = ~A	C = A	0

A decir verdad, si la negación se aplica solamente a variables proposicionales (como en 4) o es el operador principal (como en 3), excepto cuando no hay variables proposicionales (como en 1), la fórmula no será paradójica.