

Lógicas Multivaluadas

Apuntes de clase: Paradojas de la Implicación Material Tetravalente

Axel Arturo Barceló Aspeitia

abarcelo@filosoficas.unam.mx

1. Implicación Material

No es necesario que la negación aparezca en una fórmula para que pueda tener un valor paradójico. También puede aparecer en fórmulas sin negación, pero con implicación material. Por ejemplo:

$$(10) (P \vee \dots)))))))))) \dots \rightarrow P)$$

$$A = P \vee B$$

$$B = A \rightarrow P$$

P	A = P ∨ B	B = A → P	A
V	A = V	B = V	V
F	A = B	B = ~A	0

$$A = (P \vee (A \rightarrow P))$$

P	A	(P ∨ (A → P))	A
V	V	V ∨ V	V
V	F	V ∨ F	V
F	V	F ∨ V	0
F	F	F ∨ F	0

Pero, una vez más, no todas las fórmulas con implicación material son paradójicas. Es más, hay tautologías como:

$$(11) (P \rightarrow (P \vee \dots)))))))))) \dots))$$

$$A = P \rightarrow B$$

$$B = P \vee A$$

P	A = P → B	B = P ∨ A	A
V	A = B	B = V	V
F	A = V	B = A	V

$$A = (P \rightarrow (P \vee A))$$

P	A	(P → (P ∨ A))	A
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	F	V

y

(12) $(P \rightarrow (P \rightarrow \dots P))))))))))$

$$A = P \rightarrow B$$

$$B = A \rightarrow P$$

P	A = P → B	B = A → P	A
V	A = B	B = V	V
F	A = V	B = ~A	V

$$A = (P \rightarrow (A \rightarrow P))$$

P	A	(P → (A → P))	A
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	F	V

O fórmulas con valores indeterminados, pero no paradójicos, como:

(13) $(P \rightarrow (P \rightarrow \dots))))))))))$

$$A = P \rightarrow A$$

P	A	(P → A)	A
V	V	V	I
V	F	F	I
F	V	F	V
F	F	F	V

Para que una fórmula con implicación material sea paradójica es necesario (pero no suficiente, como se ve en el caso 12) que el antecedente de la implicación no sea una variable proposicional.

2. Paradoja e Inconsistencia

Lógicos como Bolander y Cook piensan que, pese a que podemos hacer tablas de verdad tetravalentes sobre este tipo de fórmulas, de todos modos deben ser excluidas de nuestro lenguaje porque hacen inconsistente cualquier sistema que las contenga, como puede verse por la siguiente prueba:

Tomemos, por ejemplo, la fórmula $A = (A \rightarrow (P \& (\sim P)))$, la cual es paradójica para cualquier asignación de valores a P.

1. A [hipótesis]
2. $(A \rightarrow (P \& (\sim P)))$ (de 1 y definición de A)
3. $(P \& (\sim P))$ (Modus Ponens de 1 y 2)
4. $(A \rightarrow (P \& (\sim P)))$ (por prueba condicional de 1 a 3)
5. A (de 5 y definición de A)
6. $(P \& (\sim P))$ (Modus Ponens de 4 y 5)

Por lo tanto, podríamos derivar una contradicción usando solamente Modus Ponens.