Lógicas Multivaluadas

Apuntes de clase: Paradojas de la Lógica Tetravalente

Axel Arturo Barceló Aspeitia
abarcelo@filosoficas.unam.mx

Extrañamente, hay fórmulas de las cuales podemos hacer tablas de verdad tetravalentes pero que hacen inconsistente cualquier sistema lógico que las contenga, es decir, no pueden incluirse en ningún sistema de derivaciones sin que éste automáticamente se vuelva inconsistente. Por ejemplo, fórmulas de la forma A = (A→Φ) para cualquier fórmula Φ tienen tabla de verdad:

<table>
<tr><th>Φ</th><th>A</th><th>(A→Φ)</th><th>A</th></tr>
<tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td rowspan="2">V</td></tr>
<tr><td>V</td><td>F</td><td>V</td></tr>
<tr><td>F</td><td>V</td><td>F</td><td rowspan="2">O</td></tr>
<tr><td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr>
</table>

Sin embargo, si ponemos una contradicción en lugar de Φ, obtenemos, por ejemplo, la fórmula A = (A→(P&(~P))), la cual es paradójica para cualquier asignación de valores a P, como lo muestra la siguiente tabla de verdad:

<table>
<tr><th>P</th><th>A</th><th>(A</th><th>→</th><th>(P</th><th>&</th><th>(~P))</th><th>A</th></tr>
<tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td rowspan="2">O</td></tr>
<tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr>
<tr><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td rowspan="2">O</td></tr>
<tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr>
</table>

Sin embargo, si aceptamos este tipo de fórmulas en el sistema, y les aplicamos las reglas estándar de la implicación material, podemos derivar una contradicción:

1. A [hipótesis]
2. (A→(P&(~P))) (de 1 y definición de A)
3. (P&(~P)) (Modus Ponens de 1 y 2)
4. (A→(P&(~P))) (por prueba condicional de 1 a 3)
5. A (de 5 y definición de A)

6. $(P\&(\sim P))$ (Modus Ponens de 4 y 5)

Además, estas formulas parecen servir muy bien para expresar la lógica de enunciados como el siguiente:

A = Si este condicional es verdadero, entonces el cielo es azul.

Si simbolizamos la proposición expresada por el enunciado "el cielo es azul" por la letra P, parece natural pensar que este enunciado debe simbolizarse por la fórmula circular: $A = (A \rightarrow P)$. Después de todo, su tabla de verdad parece capturar bien las condiciones de verdad del enunciado. Gracias su tabla de verdad, por ejemplo, podemos *saber* que como el cielo es azul, el enunciado A es verdadero. También sabemos que si el cielo no fuera azul, este enunciado sería paradójico (como el del mentiroso), y eso es exactamente l que dice la tabla de verdad.

La situación a la que nos enfrentan este tipo de fórmulas es que (i) *prima facie* están bien formuladas en la sintaxis de la lógica circular, (ii) sirven para expresar la forma lógica de enunciados, (iii) tienen tablas de verdad bien definidas pero sin embargo, (iv) si les aplicamos nuestras reglas básicas de los conectivos que les corresponden, caemos en inconsistencia, es decir, no respetan ni siquiera nuestras reglas lógicas más básicas, como Modus Ponens. Dado que nadie va a tomar la existencia de estas fórmulas como prueba de que reglas como Modus Ponens son, en realidad, inconsistentes, parece que debemos reconocer que hay por lo menos algo raro, sino es que algo muy mal con este tipo de fórmulas.

Muchos filósofos piensan que una (supuesta) implicación material que no obedece Modus Ponens no puede ser una verdadera implicación material. Uno no tiene que ser inferencialista para reconocer que es *esencial* para la implicación material que obedezca el Modus Ponens. Dado que este tipo de fórmulas no obedecen el Modus Ponens, no son realmente implicaciones materiales. El problema con tomar este punto de vista es que no explica, si no es una implicación material ¿qué es entonces? Además, debemos recordar que la tabla que obtuvimos fue usando la tabla tradicional de la implicación material y, por lo tanto, por lo menos desde esa perspectiva, la fórmula se comporta como una implicación material. Así como este tipo de fórmulas **no** se comportan como la implicación material en por lo menos un aspecto importante (no obedece sus reglas de inferencia), también se comportan **exactamente** como esperaríamos de una implicación material en otros aspectos (en que tiene condiciones de verdad composicionales que se expresan en su tabla de verdad, en que expresa la forma lógica de enunciados condicionales "si, entonces"). Uno podría tomar la posición, por lo tanto, que son *como* implicaciones materiales, pero no *realmente*.

En este punto, uno enfrenta un dilema. Puede decir simplemente que **no** son implicaciones materiales genuinas, o puede ser más conciliador y afirmar que se trata de un tipo de implicación material *sui-generis*, es decir, parecido a las típicas implicaciones materiales (esas a las que se aplica Modus Ponens) pero de *otro* tipo. Entonces, en vez de tener que rechazar las formulas o las reglas, decimos que las reglas como Modus Ponens se aplican solamente a las implicaciones materiales típicas (o normales o paradigmaticas o cómo queramos llamarles), pero no a todas, porque existen también estas otras de tipo raro.

Ejercicios:

a. Muestra que la misma contradicción se puede obtener si, en vez de usar una prueba condicional, usamos las reglas de la lógica de conclusiones múltiples.
b. Muestra que las fórmulas de la forma $A = ((\sim A) \vee \phi)$ también producen el mismo tipo de inconsistencia.

Dado que el problema no surge solamente en la implicación material, parece que uno debe extender el dilema a otro tipo de fórmulas que también son paradójicas en este mismo sentido: o las eliminamos de nuestra lógica o rechazamos la validez de nuestras reglas lógicas básicas. Una vez más, tenemos dos opciones. Una de ellas es rechazar que enunciados como A realmente expresen alguna proposición, es decir, rechazar la existencia de proposiciones cuya forma lógica sea $A = ((\sim A) \vee \phi)$ o $A = (A \rightarrow \phi)$ y eliminar este tipo de fórmulas de nuestro lenguaje.

Desde este punto de vista, decimos que la razón por la cual no podemos determinar bien las consecuencias lógicas de este tipo de fórmulas es porque no tiene sentido preguntarse por sus consecuencias lógicas. Solamente las proposiciones pueden tener o ser consecuencia lógica de otras proposiciones, es decir, sólo las proposiciones pueden usarse en argumentos. Entonces, como estas formulas paradójicas no corresponden con ninguna proposición, es decir, no expresan la forma lógica de ninguna proposición, tampoco pueden usarse en argumentos (formales).

Nótese que no estamos diciendo simplemente que *no tienen consecuencias* o que *no son* consecuencia lógica de ninguna otra fórmula. No, lo que estamos diciendo es más fuerte: es que no tiene sentido preguntarse siquiera si *tienen consecuencias* o si *son* consecuencia lógica de alguna otra fórmula o conjunto de fórmulas. Preguntarse por el comportamiento inferencial de una fórmula *presupone* que dicha fórmula expresa la forma lógica de alguna proposición. Pero como estas fórmulas no expresan la forma lógica de ninguna proposición, la presuposición no se cumple y, por lo tanto, la pregunta no puede responderse. No tiene sentido.

Si no entienden lo que quiero decir por que una pregunta *presuponga* algo, piensen en el famoso ejemplo: "¿Has dejado de golpear a tu madre?" La pregunta presupone que por lo menos solías pegarle a tu madre, si no es que lo sigues haciendo. Si nunca le has pegado a tu madre, la presuposición no se cumple y, por lo tanto, la pregunta no tiene sentido. No puede responderse – ni con un "sí", ni con un "no" – sin aceptar el presupuesto. Pero si el presupuesto es falso, la pregunta no se puede responder. Lo mismo sucede con la pregunta de si Modus Ponens se aplica a implicaciones materiales como $A = (A \rightarrow \phi)$ o no. No se puede responder porque no se cumple el presupuesto de que estas formulas sean verdaderas implicaciones materiales. Ya que ni siquiera expresan la forma lógica de ninguna proposición.

La otra opción, por supuesto, es decir que existen este otro tipo de fórmulas que expresan un tipo sui-generis de formas lógicas de cierto tipo raro de proposiciones que se parecen a las formulas normales que expresan la forma lógica de proposiciones normales (porque, por ejemplo, se les puede hacer su tabla de verdad), pero son distintas a ellas (porque, por ejemplo, no se pueden poner en argumentos de manera consistente).