Lógicas Multivaluadas

Apuntes de clase: Conjunción, Disyunción y Negación Trivalentes

Axel Arturo Barceló Aspeitia
abarcelo@filosoficas.unam.mx

1. Tablas de Verdad Reducidas

Nuestras tablas de verdad tradicionales pueden rescribirse si permitimos dejar vacías casillas en las que el valor de verdad de la fórmula atómica es irrelevante, por ejemplo, podemos rescribir así la tabla de la disyunción:

P	Q	PvQ
V		V
	V	V
F	F	F

Las primeras dos líneas señalan que no importa cuál sea el valor de verdad de uno de los disyuntos, siempre que el otro sea verdadero, la disyunción será verdadera. De la misma manera, podríamos abreviar la tabla de la conjunción de la siguiente manera:

P	Q	P&Q
V	V	V
	F	F
F		F

Las últimas dos líneas señalan que no importa cuál sea el valor de verdad de uno de los disyuntos, siempre que el otro sea falso, la conjunción será falsa.

2. Tablas de Verdad Trivalentes

Otra ventaja de este tipo de tablas es que permiten extenderse de manera muy natural para permitir un tercer valor de verdad que no sea ni verdadera ni falso. Llamémosle "I" por "indeterminado". Ahora podemos usar nuestra tabla abreviada de la disyunción clásica para desarrollar una tabla de verdad (no abreviada) para la disyunción trivalente.

Primer paso: identificar las diferentes nueve posibilidades de combinaciones para dos variables:

P	Q	PvQ
V	V	
V	I	
V	F	
I	V	
I	I	
I	F	
F	V	
F	I	
F	F	

Segundo paso: Usamos las primeras dos líneas de la tabla abreviada para determinar el valor de verdad de los renglones con por lo menos un argumento verdadero:

P	Q	PvQ
V	V	V
V	I	V
V	F	V
I	V	V
I	I	
I	F	
F	V	V
F	I	
F	F	

Tercer paso: Cómo la última línea de la tabla abreviada es también la última línea de la nueva tabla, le corresponde el mismo valor de verdad: falso.

P	Q	PvQ
V	V	V
V	I	V
V	F	V
I	V	V
I	I	
I	F	
F	V	V
F	I	
F	F	F

Cuarto paso: Finalmente, cómo ya tenemos los renglones que son verdaderos o falsos según la tabla original, los renglones que aún no tienen valor de verdad, dado que no son ni verdaderos (sino hubieran quedado como tales en el segundo paso) ni falsos (ya que tampoco quedaron así en el tercer paso), deben ser indeterminados!

P	Q	PvQ
V	V	V
V	I	V
V	F	V
I	V	V
I	I	I
I	F	I
F	V	V
F	I	I
F	F	F

En algunos casos, esta tabla de verdad aparece, no en tres columnas, sino en un cuadro así:

v	V	I	F
V	V	V	V
I	V	I	I
F	V	I	F

Lo cual tiene la ventaja de dejar más claro el patrón que emerge de la tabla.

Si seguimos los mismos pasos para la conjunción, obtenemos las siguiente tablas:

P	Q	P&Q
V	V	V
V	I	I
V	F	F
I	V	I
I	I	I
I	F	F
F	V	F
F	I	F
F	F	F

&	V	I	F
V	V	I	F
I	I	I	F
F	F	F	F

Si comparamos las dos tablas cuadradas, podemos ver la simetría entre la conjunción y la disyunción.

3. Orden de Valores y el Método Algebraico

Otra manera de extender las tablas de verdad bivalentes hacía las trivalentes es apelando a una noción de orden entre los valores. Intuitivamente, podemos pensar en el tercer valor indeterminado como **intermedio** entre verdad y falsedad. No es tan verdadero como el valor “verdadero”, pero tampoco es tan falso como “falso”. En otras palabras, es más verdadero que “falso”, pero menos verdadero que “verdadero.”

Ahora podemos definir la disyunción y la conjunción a partir de este orden. Por un lado, cuando ponemos proposiciones en disyunción, cada una con su propio valor de verdad, esta operación *selecciona* el valor de verdad **más** verdadero de los dos. Inversamente, la conjunción selecciona el valor de verdad **menos** verdadero.

Esta idea se vuelve más sencilla si usamos números para modelar este orden. Asignémosle el valor 1 a “verdadero”, 0 a “falso” y 1/2 a “indeterminado”. Entonces la disyunción de dos proposiciones con valores *n* y *m* será el número de estos dos que sea mayor: *n* si $n \geq m$ y *m* si $m \geq n$. Su conjunción será el valor que sea mayor. Si tenemos dos proposiciones de valor 1/2 (I) y 0 (F), por ejemplo, su disyunción tendrá como valor el número mayor, es decir, 1/2 (I). Su conjunción, al contrario, tomará el valor menos, es decir 0 (F). Nótese que las tablas que determina este orden son las mismas que las de la técnica de tablas abreviadas.

&	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

V	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

Esta técnica es explotada por otra famosa lógica multivalente que no estudiaremos en clase: la lógica difusa para la cual hay un infinito de valores intermedios entre "verdadero" y "falso", algunos más verdaderos que otros.

4. Supervaluaciones

Finalmente, siguiendo a Visser (1984), podemos usar el método de supervaluaciones de Van Fraseen para obtener también las mismas tablas. La idea detrás de esta técnica es muy simple. Si tenemos una proposición cuyo valor de verdad se encuentra indeterminado, debemos considerar tanto la posibilidad de que sea verdadero como que sea falso. A fin de cuentas, según los trivalentistas, proposiciones como los futuros contingentes pueden ser verdaderos y pueden ser falsos, y hay que considerar ambas posibilidades. Así que al hacer las tablas de verdad correspondientes hay que explorar ambas posibilidades y ver si ambas terminan dando un mismo valor de verdad o no. Si dan un valor de verdad determinado, se pone ese. Si no lo dan, entonces su valor de verdad queda indeterminado.

Pongamos otra vez el ejemplo de la disyunción. Si tenemos la disyunción de una proposición verdadera *P* con otra indeterminada *Q*, debemos considerar las dos posibilidades: que *Q* sea verdadera o que *Q* sea falsa. Si *Q* es verdadera, entonces las dos proposiciones son verdaderas y su disyunción también lo es. Si, por el contrario, *Q* es falsa, da lo mismo, pues *P* es verdadera y la disyunción de una proposición verdadera con otra falsa tiene también valor verdadero. En ambos casos, pues, la disyunción es verdadera y por eso podemos concluir que la disyunción de una proposición verdadera *P* con otra indeterminada *Q* es verdadera.

Supongamos ahora que queremos saber el valor de verdad de la disyunción de una proposición indeterminada *R* con otra falsa *S*. Otra vez, consideramos las dos posibilidades: que *R* sea verdadera o que *R* sea falsa. Si *R* es verdadera, entonces su disyunción con *S* es verdadera también. Si *R* es falsa, sin embargo, como *S* es también falsa, su disyunción también es falsa. En este caso, tenemos que las posibilidades divergen en el valor de verdad que le asignan a la disyunción. Por ello, debemos concluir que el valor de la disyunción, para esta asignación de valores a los disyuntos, es indeterminada. En otras palabras, el valor de verdad de la disyunción de una proposición indeterminada *R* con otra falsa *S* no es ni verdadero ni falso, sino indeterminado.

Una vez más, un poco de atención muestra que las tablas que se obtienen por este método son las mismas que las que se obtienen por cualquiera de los métodos anteriores. Voy a poner como ilustración solamente el de la disyunción:

<table>
<tr><th colspan="2">P</th><th colspan="2">Q</th><th colspan="2">PvQ</th></tr>
<tr><td colspan="2">V</td><td colspan="2">V</td><td colspan="2">V</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">V</td><td rowspan="2">I</td><td>V</td><td>V</td><td rowspan="2">V</td></tr>
<tr><td>F</td><td>V</td></tr>
<tr><td colspan="2">V</td><td colspan="2">F</td><td colspan="2">V</td></tr>
<tr><td rowspan="2">I</td><td>V</td><td colspan="2" rowspan="2">V</td><td>V</td><td rowspan="2">V</td></tr>
<tr><td>F</td><td>V</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="4">I</td><td>V</td><td>V</td><td rowspan="4">I</td></tr>
<tr><td>F</td><td>V</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td>V</td><td>V</td></tr>
<tr><td>F</td><td>F</td></tr>
<tr><td rowspan="2">I</td><td>V</td><td colspan="2" rowspan="2">F</td><td>V</td><td rowspan="2">I</td></tr>
<tr><td>F</td><td>F</td></tr>
<tr><td colspan="2">F</td><td colspan="2">V</td><td colspan="2">V</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">F</td><td rowspan="2">I</td><td>V</td><td>V</td><td rowspan="2">I</td></tr>
<tr><td>F</td><td>F</td></tr>
<tr><td colspan="2">F</td><td colspan="2">F</td><td colspan="2">F</td></tr>
</table>

5. Negación Trivalente

Lo dicho anteriormente sobre la disyunción y la conjunción se extiende fácilmente a la negación. Como no hay manera de abreviar la de por sí ya bastante simple tabla de la negación, extenderla hacia la trivalencia no requiere de mayor esfuerzo.

P	~P
V	F
I	I
F	V

Bajo el enfoque agebraico esto significa que la negación invierte el orden de los valores: al mayor le asigna el menor y viceversa.

<u>TAREA</u>

Realiza las tablas de verdad de las siguientes fórmulas:

1. *P*∨*(Q*∨*R)*
2. *P&(~Q)*
3. *(~P)*∨*Q*
4. *P*∨*(~P)*
5. *P&(~P)*