Lógicas Multivaluadas

Apuntes de clase: Reglas de Inferencia: Conjunción

Axel Arturo Barceló Aspeitia

abarcelo@filosoficas.unam.mx

1. Los tres sentidos en los que se habla del significado de las constantes lógicas.

- (i. Representacionalismo) El significado de las constantes lógicas es su contribución a la determinación de las condiciones de verdad de los enunciados en que ocurren. En el caso de las conectivas lógicas básicas, es decir, los operadores del cálculo proposicional, su significado preciso es una función de verdad. En este sentido, el significado de los conectivos está dado en su tabla de verdad.
- (ii. Inferencialismo) El significado está determinado por reglas claras de manipulación. Hay muchas maneras de entender esta idea, pero la más común es aquella según la cual el significado de las constantes está determinado por sus reglas de introducción y eliminación dentro de un sistema de deducción natural.¹
- (iii. Regimentismo) el significado de las constantes lógicas captura cierto sentido y uso de algunas palabras *lógicas* del lenguaje natural como ‘no’, ‘y’, ‘o’, ‘si, entonces’, etc.

Por ahora, concentrémonos en las dos primeras maneras de hablar del significado de una constante lógica. Por un lado, las semánticas *representacionales* sostienen que el significado de las conectivas lógicas está determinado por su contribución a las

¹. El locus clásico de esta posición es el seminal trabajo de Gerhard Gentzen, en cuyo §5.13, escribe: “Las introducciones representan, como si así fuera, las “definiciones” de los símbolos correspondientes, y las eliminaciones no son más, en el análisis final, que las consecuencias de esas definiciones.” (“Investigations into Logical Deduction” [Investigaciones sobre la Deducción Lógica] *American Philosophical Quarterly*, Vol. I, No.4, Octubre 1964, p. 295, §5.13. Traducción mía).

condiciones de verdad de las proposiciones en las que ocurren.² Esta contribución se presenta comúnmente en términos de una función de verdad, expresada en una tabla de verdad. Por el otro lado, las semánticas *inferencialistas* (también llamadas “funcionales” o “de rol conceptual” (Block 2000) sostienen que el significado de un conectivo lógico está determinado³ por su contribución al rol inferencial de dichas proposiciones (Block 1993, Boghossian 1993). Esto significa que “el significado de las constantes lógicas está determinado por ciertas implicaciones características”. (Harman 1986, 126) Estas implicaciones características corresponden a las reglas de eliminación e introducción de un sistema de deducción natural (Harman 1987, 137). Para los inferencialistas, por lo tanto, el significado de una conectiva lógica está íntimamente ligado al cálculo deductivo. Para los representacionistas, en contraste, dicho significado está más conectado a su interpretación. Tradicionalmente, se asume que la interpretación de un lenguaje formal “establece el vínculo entre formulas y lo que representan”. (Peregrin 1994, 5) De ahí que, a veces, a la perspectiva representacionista se le llame “semántica”, y a la inferencialista “sintáctica”.

La perspectiva semántica se origina en el trabajo lógico de Pierce y se encuentra implícita en el trabajo de Russell, Ramsey y otros. Sin embargo, no alcanzó su madurez

². Llamamos “representacionales” a estas teorías, bajo el presupuesto común de que el contenido representacional de un enunciado está íntimamente ligado a sus condiciones de verdad. Crimmins (2000) 649, 650. En sentido estricto, no todas las teorías representacionistas se formulan en condiciones de verdad, sino que algunas usan un noción más débil como la de condiciones de afirmabilidad.

³. En (2001), Mark Eli Kalderon distingue entre un inferencialismo fuerte, reduccionista y un inferencialismo débil, superveniencialista. Según él, “el inferencialista [solamente] está comprometido con [la] tesis de superveniencia [según la cual] el contenido lógico superviene sobre el rol inferencial, no que el contenido lógico y el rol inferencial deban identificarse”. (Kalderon 2001, 132) Todas las traducciones son del autor, excepto donde así sea indicado.

sino hasta el trabajo de Tarski sobre la noción de verdad en los lenguajes formales.⁴ La perspectiva sintáctica hunde sus raíces en el primer cálculo lógico, la *Conceptografía* de Frege, y pasajes de Wittgenstein como el siguiente:

Las reglas de inferencia lógica no pueden estar equivocadas o correctas. Determinan el significado de los signos. (Wittgenstein 1956, 24)

Podemos concebir las reglas de inferencia – quiero decir – como si le asignaran significado a los signos, porque son las reglas para el uso de dichos signos. (Wittgenstein 1956, 398)

Sin embargo, su piedra de toque es un multi-citado pasaje de las “Investigaciones al interior de la Deducción Lógica”⁵ de Gerhard Gentzen, donde éste escribe, refiriéndose a las reglas de derivación de su cálculo, que:

Las reglas de introducción representan, digamos, las “definiciones” de los símbolos correspondientes, y las de eliminación no son más, en el análisis último, que las consecuencias de dichas definiciones. (Gentzen 1964, 295 §5.13)

Recientemente, ésta ha sido la perspectiva adoptada por lógicos y filósofos como Wilfrid Sellars, Gilbert Harman, Michael Dummett, Ned Block, y Robert Brandom.

2. ¿Qué significa ‘&’ ?

Para ver mejor la diferencia entre estas perspectivas, tomemos un conectivo simple como ejemplo: la conjunción. Desde una perspectiva representacionista, el significado de esta constante lógica no es otra sino la función de verdad dada en su tabla de verdad:

p	q	$p \cdot q$
T	T	T

⁴. Field (1972) ofrece una historia crítica de la interpretación representacionista de la teoría de Tarski y su relación con el inferencialismo.

⁵. Vale la pena notar que, aunque el de Gentzen no fue el primer sistema de deducción natural, sí fue el primero en introducir las nociones de regla de introducción y de eliminación, y de señalar su importancia para definir, no solamente el significado de los conectivos lógicos, sino también su propio carácter lógico, es decir, lo que los distingue del resto del vocabulario (no-lógico). (Pelletier 1999, 1-31)

T	F	F
F	T	F
F	F	F

Contrástese esta definición del significado del conectivo ‘·’ con sus reglas de introducción y eliminación:

Introducción de la Conjunción:	Eliminación de la Conjunción:	
p		
q		

$p \cdot q$	$p \cdot q$	$p \cdot q$
	-----	-----
	p	q

Es una opinión generalizada que, por lo menos en el caso de las conectivas de la lógica extensional (es decir, no las de la lógica modal, temporal, etc.), ambos tratamientos son equivalentes y es fácil demostrarlo.⁶ Basta apelar a nuestra definición clásica de consecuencia lógica (y a su dual). Así, decir que una proposición implica a otra equivale a decir que la primera no puede ser verdadera, sin la otra serlo también; en otras palabras, para cualquier circunstancia de evaluación,⁷ si la primera es verdadera, la segunda también lo es. Bajo esta equivalencia, se puede demostrar fácilmente que las reglas de introducción y eliminación de los conectivos extensionales contienen la misma información sobre el significado de los conectivos lógicos que las funciones de verdad. En el caso de la conjunción, por ejemplo, las reglas de introducción y eliminación dirían que, en cualquier circunstancia de evaluación:

(Introducción) Si S_1 y S_2 son verdaderos, también lo es $S_1 \& S_2$.

(Eliminación) $S_1 \& S_2$ es verdadero sólo si S_1 y S_2 son ambos verdaderos.

⁶. En palabras de Jaroslav Peregrin, que “los significados que comúnmente adscribimos a las expresiones [puedan] construirse como roles inferenciales *disfrazados*” o “*encapsulados*.” (2003).

⁷. Las teorías representacionales, por lo tanto, requieren una especificación del tipo relevante de circunstancias en las que se evalúan las condiciones de verdad de un enunciado.

En conjunto, las reglas dicen que $S_1 \& S_2$ es verdadero si y sólo si S_1 y S_2 son ambos verdaderos, que es exactamente lo mismo que dice la tabla de verdad de la conjunción.

3. ¿De dónde salieron estas reglas y cómo se relacionan con la tabla de verdad?

Para mostrar la equivalencia entre tablas de verdad y reglas de introducción y eliminación, no lo vamos a hacer de manera directa, sino a través de las tablas reducidas que introducimos a principio del curso. Si recuerdan, la tabla abreviada de la conjunción es:

P	q	$p \cdot q$
T	T	T
F		F
	F	F

No es difícil darse cuenta que la primera regla, la de introducción, corresponde al primer renglón de la tabla. Ambas dicen que si p y q son ambas verdaderas, la conjunción $p \& q$ también lo es.

Un poco más de ingenio se requiere para darse cuenta de que las reglas de eliminación corresponden a los otros dos renglones. Basta recordar que la definición dual de consecuencia nos dice que si la conclusión de un argumento válido es falsa, alguna de las premisas debe ser falsa. Si aplicamos esto a la primera de las reglas de eliminación, por ejemplo, tendremos que si la conclusión p es falsa, entonces una de las premisas debe también ser falsa. Dado que la única premisa es la conjunción $p \& q$, entonces esta debe ser falsa. Esto significa que la primera regla de eliminación de la conjunción dice que si p es falsa, entonces $p \& q$ debe ser falsa también. Esto es exactamente lo que dice el segundo renglón de la tabla abreviada. De manera simétrica, la segunda regla de eliminación nos dice que si q es falsa, entonces $p \& q$ debe ser falsa también. Esta regla corresponde al tercer y último renglón de la tabla.

4. Conjunción Trivalente

Hemos dicho que las reglas estándar de introducción y eliminación de la conjunción contienen la misma información que la tabla de verdad abreviada, y como ya sabemos, la tabla de verdad de la conjunción trivalente respeta esta tabla abreviada:

P	q	$p \cdot q$
T	T	T
T	I	I

T	F	F
I	T	I
I	I	I
I	F	F
F	T	F
F	I	F
F	F	F

Por lo tanto, las reglas tradicionales de introducción y eliminación se aplican también en la lógica trivalente.

5. Generalizando de manera ideal

Gentzen y el resto de los filósofos que trabajaron en desarrollar el método de Deducción Natural buscaban encontrar una manera de hacer derivaciones formales que fuera más cercana a la manera en que realmente razonamos. Otros lógicos que han trabajado con este tipo de sistemas de reglas han buscado también que su uso sea tan sencillo y mecánico como el de tablas de verdad (por eso, a muchos computólogos les siguen interesando las reglas lógicas de inferencia).

La idea de tener reglas de eliminación y de introducción es concebir a los argumentos como una transformación de las premisas en la conclusión. Idealmente, queremos que para pasar de las premisas a la conclusión, solamente sea necesario poner atención a cuales son las conectivas en las premisas y cuales las de la conclusión. Después, basta eliminar las conectivas que sobran de las premisas e introducir las que faltan en la conclusión. Por ejemplo, si la premisas son $p \& q$ y la conclusión es $p \vee r$, sabemos que lo que necesitamos es eliminar la conjunción, para tener a p separada y luego introducir la disyunción para juntarla con r . Esto significa que solo necesitamos aplicar la regla de eliminación de la conjunción y la de introducción de la disyunción.

Así pues, idealmente, nos gustaría tener para cualquier conectiva lo que acabamos de obtener para la conjunción es decir: un sistema de reglas de introducción y eliminación tales que:

- (1) No aparezca ningún otro conectivo en cada regla más que el que se está definiendo
- (2) A cada regla de introducción le corresponda un renglón que termina en V de la tabla abreviada y vice versa
- (3) A cada regla de eliminación le corresponda un renglón que termina en F de la tabla abreviada y viceversa

Desafortunadamente, encontrar reglas que satisfagan estos criterios para otras conectivas que no sean la conjunción no parece ser nada fácil, como veremos a continuación.