Lógicas Multivaluadas
Apuntes de clase: Reglas de Inferencia
Axel Arturo Barceló Aspeitia
abarcelo@filosoficas.unam.mx

1. El Problema con la Disyunción

Como en el caso de la conjunción, nuestro punto de partida para obtener las reglas de introducción y eliminación de la disyunción será la tabla de verdad abreviada:

p	*Q*	*p*∨*q*
V		V
	V	V
F	F	F

En esta case, la reglas de introducción son sencillas y conocidas. El primer renglón dice que si p es verdadera, también lo es $p \vee q$. Si ponemos esta información en forma de regla de inferencia, ésta sería:

$$\frac{p}{p \vee q}$$

El segundo dice lo mismo respecto a q: si q es verdadera, también lo es $p \vee q$. La regla correspondiente, por lo tanto, es:

$$\frac{q}{p \vee q}$$

El problema aquí es encontrar una regla de eliminación para el último renglón. Se han ofrecido varias alternativas. Por ejemplo, el silogismo disyuntivo:

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \end{array}}{q}$$

o una versión del silogismo hipotético:

$$\frac{\dfrac{p}{r} \qquad \dfrac{q}{r} \qquad p \vee q}{R}$$

Esta última regla, para los que no la conozcan, dice que si de p se sigue r y de q se sigue también r, entonces r se sigue de $p \vee q$. El problema es que, por supuesto, ninguna de estas opciones satisface de manera natural los requisitos que queríamos de un buen conjunto de reglas de eliminación. Yo creo que es porque usamos una noción de regla de inferencia (y de consecuencia lógica y de argumento) demasiado restrictiva porque no es dual.

2. Consecuencia Lógica Extendida

El problema fundamental de nuestra definición de argumento es que no es simétrica: podemos tener varias premisas (o ninguna), pero siempre es necesario tener una y sólo una conclusión. En vez de eso, Gentzen, Carnap y otros hemos propuesto mejor trabajar con una noción de argumento más amplia tal que, así como puede haber argumentos con varias premisas, también puede haber argumentos con varias conclusiones; y así como hay argumentos sin ninguna premisa, también debe poder haber argumentos sin conclusión. De esta manera, obtenemos dualidad perfecta en nuestra definición de consecuencia lógica/validez:

Un argumento es deductivamente válido si es lógicamente imposible que las premisas fueran todas verdaderas y las conclusiones todas falsas.

Por lo tanto:

Un argumento es deductivamente válido si siempre que las premisas son (todas) verdaderas, alguna de las conclusiones también lo es.

Un argumento es deductivamente válido si siempre que las conclusiones son (todas) falsas, alguna de las premisas también lo es.

Por lo tanto:

En un argumento deductivamente válido sin premisas, el conjunto de conclusiones se sigue de cualquier cosa.

En un argumento deductivamente válido sin conclusiones, del conjunto de premisas se sigue cualquier cosa.

Por lo tanto:

En un argumento deductivamente válido sin premisas, si hay una sola conclusión, ésta es una tautología, es decir, una verdad lógica.

En un argumento deductivamente válido sin conclusiones, si hay una sola premisa, ésta es una contradicción lógica, es decir, es lógicamente falsa.

Para tener una visión más intuitiva de esta nueva noción extendida de argumento, nos recomienda Gentzen, conviene pensar en las premisas como unidas en conjunción, y a las conclusiones unidas por disyunción.

3. Reglas de Inferencia Extendidas

Ahora sí es bien fácil encontrar la regla de eliminación necesaria para la disyunción:

$$\begin{array}{c} p \lor q \\ \hline p \\ q \end{array}$$

Ahora sí, si leemos esta regla con nuestra nueva definición dual de consecuencia lógica, tendremos que la regla dice que si las conclusiones, p y q, las dos son falsas, entonces la premisa, $p \lor q$, también debe ser falsa – ¡exactamente lo mismo que dice el último renglón de la tabla!

Además, tenemos un método fácil de generalizar para obtener reglas de cualquier renglón de las tablas abreviadas:

1. Si el renglón termina en V, entonces la regla debe ser de introducción, o sea que hay que poner la formula que estamos definiendo entre las conclusiones (debajo de la raya).
2. Si el renglón termina en F, entonces la regla debe ser de eliminación, o sea que hay que poner la formula que estamos definiendo entre las premisas (arriba de la raya).
3. Luego, las variables a las que les toca V se ponen entre las premisas (arriba de la raya).
4. Las variables a las que les toca F se ponen entre las conclusiones (debajo de la raya).
5. ¡Y ya está!

4. Negación

Apliquemos nuestro nuevo método a la tabla de negación:

p	$\sim p$
V	F
F	V

El primer renglón termina en F, así que le corresponde la regla de eliminación. La formula negada va arriba. Como a p se le asigna V en ese renglón, esta variable también va arriba. La regla resultante, por lo tanto es:

$$\begin{array}{c} p \\ \sim p \\ \hline \end{array}$$

Debajo de la línea no hay ninguna formula, lo que significa que cualquier cosa se sigue de p y $\sim p$.

El segundo renglón termina en V, así que le corresponde la regla de introduccion. La formula negada va abajo. Como a p se le asigna F en ese renglón, esta variable también va abajo. La regla resultante, por lo tanto es:

$$\begin{array}{c} \hline p \\ \sim p \end{array}$$

Arriba de la línea no hay ninguna formula, lo que significa que de cualquier cosa se sigue p o $\sim p$.