Lógicas Multivaluadas

Apuntes de clase: Inferencialismo Trivalente

Axel Arturo Barceló Aspeitia

abarcelo@filosoficas.unam.mx

Sería ideal si la armonía entre reglas de inferencia (de introducción y eliminación en un sistema de múltiples conclusiones) y tablas de verdad que hemos encontrado en el caso de la lógica proposicional diádica clásica se pudiera extender fácilmente a la lógica trivalente. Sin embargo, esto no es así.

En el caso de la disyunción y la conjunción, no hay ningún problema. Las tablas trivalentes que hemos definido satisfacen las reglas de introducción y eliminación que también hemos definido (bajo la definición extendida de consecuencia lógica: $\min(\Gamma) \leq \max(\Delta)$). Sin embargo, ninguna de las tablas de la implicación material (ni la de Lukaciewicz ni la definida por supervaluaciones) satisface las reglas de inferencia que, desde la perspectiva inferencialista, se supone definen la implicación material. ¿Qué sucede aquí?

Ninguna de las dos tablas satisface siquiera Modus Ponens. En otras palabras, si interpretamos la implicación material a la manera de Lukaciewicz o por la definición obtenida por supervaluaciones, de cualquier manera Modus Ponens no resulta ser un esquema válido de inferencia:

		Premisas Γ		Conclusión Δ	
P	Q	*P*	P→Q	Q	min(Γ) ≤ max(Δ)
1	1	1	1	1	✓
1	1/2	1	1/2	1/2	✓
1	0	1	0	0	✓
1/2	1	1/2	1	1	✓
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	✓
1/2	0	1/2	1/2	0	✗
0	1	0	1	1	✓
0	1/2	0	1	1/2	✓
0	0	0	1	0	✓

	Premisas Γ	Conclusión Δ	min(Γ) ≤ max(Δ)

P	Q	*P*	P→Q	Q	
1	1	1	1	1	✓
1	1/2	1	1/2	1/2	✓
1	0	1	0	0	✓
1/2	1	1/2	1	1	✓
1/2	1/2	1/2	1	1/2	✓
1/2	0	1/2	1/2	0	✗
0	1	0	1	1	✓
0	1/2	0	1	1/2	✓
0	0	0	1	0	✓

En ambos casos, el problema es con el renglón en que el antecedente es indeterminado y el consecuente falso. Como la implicación es indeterminada, entonces las dos premisas son indeterminadas, mientras que la conclusión es falsa. Esto hace que el valor mínimo de las premisas (indeterminado) no sea menor o igual al de la conclusión (falso), sino mayor. Nótese que la única manera en que este renglón fuera consistente con Modus Ponens sería si la implicación dada fuera *definitivamente falsa*, pero ¡ni Lukaciewicz ni ningún otro de los métodos que hemos estudiado piensan que la implicación material cuando el antecedente es indeterminado y el consecuente falso sea *definitivamente* falsa!

Véamos ahora lo que sucede con otra de las reglas de la implicación material: aquella que no tiene premisas, pero tiene como conclusiones la implicación y el antecedente. Otra vez, hay problemas:

		Conclusiones Δ		
P	Q	*P*	P→Q	1 ≤ max(Δ)
1	1	1	1	✓
1	1/2	1	1/2	✓
1	0	1	0	✓
1/2	1	1/2	1	✓
1/2	1/2	1/2	1/2	✗
1/2	0	1/2	1/2	✗
0	1	0	1	✓
0	1/2	0	1	✓
0	0	0	1	✓

		Conclusiones Δ		
P	Q	*P*	P→Q	1 ≤ max(Δ)
1	1	1	1	✓

1	1/2	1	1/2	✓
1	0	1	0	✓
1/2	1	1/2	1	✓
1/2	1/2	1/2	1	✓
1/2	0	1/2	1/2	✗
0	1	0	1	✓
0	1/2	0	1	✓
0	0	0	1	✓

En este caso, la tabla de Lukaciewicz tiene la ventaja de que solamente falla en un solo caso: otra vez, cuando el antecedente es indeterminado y el consecuente falso. El problema es que ahora, para que la regla fuera válida, la implicación debería ser *definitivamente verdadera*. ¡Vaya problema! Para que valga el modus ponens, es necesario que sea *definitivamente* falsa. Como es imposible que la implicación sea tanto *definitivamente* falsa como *definitivamente* verdadera, debemos concluir que no hay manera de encontrar una tabla de verdad bivalente que satisfaga las reglas de introducción y eliminación que queríamos para la implicación material. Esto significa que, si los inferencialistas tienen razón y dichas reglas *definen* a la implicación material, entonces no puede existir la implicación material en lógica trivalente.

El mismo problema vuelve a surgir en el caso de la negación:

Traduciendo Reglas de Conclusión Múltiple en Tablas Trivalentes

1. Conjunción:

P	Q	P Q P&Q			P&Q P			P&Q Q			P&Q
V	V	V			V	I	F	V	I	F	V
V	I	V	I		V	I	F		I	F	I
V	F	V	I	F	V	I	F			F	F
I	V	V	I			I	F	V	I	F	I
I	I	V	I			I	F		I	F	I
I	F	V	I	F		I	F			F	F
F	V	V	I	F			F	V	I	F	F
F	I	V	I	F			F		I	F	F
F	F	V	I	F			F			F	F

&	V	I	F
V	V	I	F

I	I	I	F
F	F	F	F

2. Disyunción:

P	Q	P PvQ			Q PvQ			PvQ P Q			PvQ
V	V	V			V			V	I	F	V
V	I	V			V	I		V	I	F	V
V	F	V			V	I	F	V	I	F	V
I	V	V	I		V			V	I	F	V
I	I	V	I		V	I			I	F	I
I	F	V	I		V	I	F		I	F	I
F	V	V	I	F	V			V	I	F	V
F	I	V	I	F	V	I			I	F	I
F	F	V	I	F	V	I	F			F	F

v	V	I	F
V	V	V	V
I	V	I	I
F	V	I	F

3. Implicación Material:

P	Q	P P→Q Q			Q P→Q			$\overline{P \to Q}$ P			P→Q
V	V	V	I	F	V			V	I	F	V
V	I		I	F	V	I		V	I	F	I
V	F			F	V	I	F	V	I	F	F
I	V	V	I	F	V			V	I	F	V
I	I	V	I	F	V	I		V			V
I	F			F	V	I	F	V			?
F	V	V	I	F	V			V			V
F	I	V	I	F	V	I		V			V
F	F	V	I	F	V	I	F	V			V

v	V	I	F
V	V	I	F
I	V	V	?
F	V	V	V

4. Negación:

P	P		~P

	$\underline{\sim P}$	P ~P	
V	F	V I F	F
I	F	V	?
F	V I F	V	V

¡Ouch! ¡Es imposible encontrar una tabla de verdad trivalente que satisfaga las reglas de intoducción y eliminación que definen inferencialmente tanto la negación clásica como la implicación material! Como ya vimos, en el caso de la implicación material, el problema es el caso en que el antecedente es indeterminado y el consecuente falsa, debería ser *definitivamente verdadero* para que las reglas de introducción sean válidas y *definitivamente falso* para que la regla de eliminación sea válida. De la misma manera, en el caso de la negación, para que la regla de introducción sea válida, P o ~P, una de las dos debe ser verdadera; pero para que la regla de eliminación sea válida, una de las dos debe ser falsa. Si P no es ella misma ni verdadera ni falsa, si es indeterminada, entonces su negación ~P debería ser tanto verdadera (para satisfacer la regla de introducción) como falsa (para satisfacer la regla de eliminación), lo cual es imposible.

Podría pensarse que esto se debe a que la definición inferneicalista de la negación que aquí ofrecemos presupone la bivalencia y que, por lo tanto, no es de sorprender que la negación trivalente no la satisfaga. Pero el problema es aún más profundo: ¡No hay manera de definir inferenicalmente la negación trivalente! Es imposible encontrar reglas de introducción o eliminación que ella y sólo ella satisfaga:

P	P $\underline{\sim P}$	$\underline{P}$ ~P	$\underline{\sim P}$ P	$\underline{\quad\quad}$ ~P P	$\underline{\sim P}$	$\underline{\quad}$ ~P	P $\underline{\sim P}$ P	$\underline{P}$ ~P P
V	F	V	V I F	V I F	F	V	V I F	V I F
I	F	V I	I F	V	F	V	V I F	V I F
F	V I F	V I F	F	V	F	V	V I F	V I F

Usando hipótesis en las reglas

Si dejamos atrás los requisitos estrictos del inferencialismo, es práctica común usar, por ejemplo, el metateorema de la deducción como regla de introducción de la implicación material. Este metateorema dice que P→Q si de P se sigue Q. En otras palabras, si asumimos P como hipótesis y de él, en combinación con otras premisas Γ, podemos deducir Q, entonces P→Q se sigue lógicamente de esas mismas premisas Γ (obviamente, sin tener que suponer la hipótesis P).

P	Q	P P→Q Q			[P] Q P→Q			P→Q
V	V	V	I	F	V			V
V	I		I	F	V	I		I
V	F			F	V	I	F	F
I	V	V	I	F	V			V
I	I	V	I	F	V			V
I	F			F	V	I	F	F
F	V	V	I	F	V			V
F	I	V	I	F	V			V
F	F	V	I	F	V			V

v	V	I	F
V	V	I	F
I	V	V	F
F	V	V	V

Sin embargo, aún si tratamos de usar una estrategia similar para el caso de la negación, no podemos obtener la tabla trivalente de la negación que esperamos. Sin embargo, sí podemos definir otro tipos de negación correspondiente al operador "es determinadamente falso" que a diferencia de la negación de Lukaciewicz, da para el argumento indeterminado el valor falso (ya que lo indeterminado no es determinadamente falso):

Para "es determinadamente falso" (–), usamos la regla de introducción de la negación clásica:

P

–P

———

Y como regla de introducción usamos el siguiente metateorema: que –P si de P se sigue algo determinadamente falso. En otras palabras, si asumimos P como hipótesis y de él, en combinación con otras premisas Γ, podemos deducir algo determinadamente falso F, entonces que P es determinadamente falso, –P, se sigue lógicamente de esas mismas premisas Γ (obviamente, sin tener que suponer la hipótesis P).

P	P –P			[P] F –P			–P
V			F	V	I	F	F
I			F	V	I	F	F
F	V	I	F	V			V

Nótese que para esta “negación” es tautológico que –(P&–P), pero no Pv–P.

TAREA:

Usando la tabla de inferencia de la implicación material obtenida inferencialmente, hacer las tablas de verdad trivalente para las siguientes fórmulas:

1. (–Q)→(–P)
2. (–P)vQ
3. – ~P
4. ~ –P