Comentarios a
"Casos de Irreducibilidad y el Axioma de Reducibilidad"
de Silvio Pinto

Axel Arturo Barceló Aspeitia
Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM

Silvio Pinto (ed.), Bertrand Russell y el Análisis Filosófico a partir de "On Dennoting",
Biblioteca de Signos, UAM-Iztapalapa / Casa Juan Pablos, México 2008.
ISBN UAM: 978-970-31-0840-4, CJP: 978-968-9172-44-4. Pp. 285-292.

§1. Como Silvio Pinto reconoce, es difícil separar la discusión del Axioma de Reducibiliad (AR) de Bertrand Russell de la discusión sobre la logicidad de este y otros principios del proyecto logicista. Por ello, centraré mis comentarios en esta cuestión. Por principio de cuentas, Silvio también reconoce que lo que Russell y Frege entienden por 'lógica' dista mucho de lo que hoy en día se entiende por este mismo término, alrededor del debate logicista. A este respecto, Silvio señala dos puntos de divergencia: Por un lado, Frege y Russell aceptaban, por lo menos, parte de la lógica de segundo orden como *lógica* (y no matemática) y, segundo, "no [les] molestaba en lo más mínimo el tener que convivir con… proposiciones lógicas existenciales" como el Axioma del Infinito." (pp. 4-5) Para Russell, por lo menos en el período de postulación de este axioma, la existencia de compromisos ontológicos no eran inconsistentes con la completa generalidad de la lógica. En este punto, aunque Silvio Pinto ofrece evidencia textual de la posición de Russell, es una pena que no se haya detenido un poco más a explicar exactamente cómo concilia el filósofo inglés la completa generalidad de la lógica con la existencia de, por lo menos, un número infinito de objetos lógicos.

No conozco lo suficiente como para responder yo mismo esta pregunta, pero en o que sigue quisiera esbozar una posible defensa de la propuesta Russelliana. Empecemos deteniéndonos a preguntar qué bases se pueden ofrecer para sostener que "la lógica no debería contener afirmaciones existenciales". Aceptar el reto logicista es aceptar, por lo menos la posibilidad *lógica* de reducir los objetos matemáticos a objetos lógicos. Si se excluye de la definición de lógica la posibilidad de objetos lógicos, el proyecto logicista sería imposible también por definición. Siguiendo esta misma línea de razonamiento, el axioma del Infinito debe entenderse no como una afirmación existencial, sino, precisamente como el rechazo de cualquier límite *lógico* a la existencia. Si la lógica no puede decirnos *cuantos* objetos hay, las únicas posibilidades consistentes con este principio serían la afirmación de la existencia de un número infinito de objetos lógicos o de ninguno. En otras palabras, supongamos que existan tan solo un número finito k de objetos lógicos. Entonces, el enunciado (1) "Hay por lo menos k objetos" sería lógicamente verdadero (ya que su verdad estaría garantizada por la existencia de los k objetos lógicos, lo cual es un hecho lógico), mientras que el enunciado (2) "Hay por lo menos $k+1$ objetos", aunque verdadero (bajo el supuesto de que hay por lo menos un objeto no-lógico), no sería lógicamente verdadero. Sin embargo, dado que (1) y (2) se encuentran al mismo nivel sintáctico, es decir, ambas son expresables en vocabulario lógico puro y por lo tanto, desde la perspectiva Russelliana, son enunciados de máxima generalidad, entonces uno no puede ser lógicamente verdadero (o falso) y el otro no.[1] Dado que el argumento se puede repetir para cualquier *k* – es decir, se puede hacer una inducción completa sobre los números naturales[2] –, nos quedan dos opciones: (a) o bien todos los enunciados de la forma "Hay por lo menos *n* objetos", para cualquier *n*, pertenecen a la lógica (es decir, son lógicamente verdaderos o lógicamente falsos) o bien (b) ninguno de ellos le pertenece (es decir, serían verdaderos o falsos por razones extra-lógicas).

Sin embargo, dado que debe existir por lo menos un objeto lógico para que el proyecto logicista sea plausible, aceptar la opción (b) sería una petición de principio contra el logicismo. No queda otra opción sino aceptar (a), es decir, que todos los enunciados de la forma "Hay por lo menos *n* objetos", para cualquier *n*, son lógicamente verdaderos o lógicamente falsos. Una vez reconocido esto, tenemos todos los elementos para reducir a un absurdo el supuesto de que existen tan solo un número finito *k* de objetos lógicos. Basta darse cuenta de que el enunciado (2) arriba mencionado, "Hay por lo menos *k+1* objetos", no puede ser ni lógicamente verdadero ni lógicamente falso. No puede ser lógicamente falso, porque entonces sería lógicamente verdadero que no existen los objetos no lógicos. Sin embargo, es un hecho (no lógico) que hay más objetos que los objetos lógicos. Por lo

[1]. Por supuesto, el argumento podría quebrarse si (i) se rechaza el principio de que la lógica es formal, es decir, que las propiedades lógicas sobrevienen sobre propiedades sintácticas de (la forma lógica de) los enunciados o (ii) se encontrara una distinción sintáctica, y *lógicamente relevante*, entre (la forma lógica de) los enunciados "Hay por lo menos *j* objetos" para toda *j* menor o igual a *k* (el número de objetos lógicos), y "Hay por lo menos *i* objetos" para toda *i* mayor a *k*. Sin embargo, rechazar (i) sería radicalmente heterodoxo y no puedo imaginarme cómo podría lograrse (ii) de una manera no *ad-hoc*.

[2]. El presente argumento se puede extender para cualquier cardinalidad, baste sustituirse *k+1* en (2) por otro cardinal *l* estrictamente mayor que *k*.

tanto, (2) no puede ser verdadero y, mucho menos, lógicamente verdadero. Por la misma razón, (2) tampoco puede ser lógicamente verdadero, ya que entonces sería lógicamente verdadero que sí los hay. Sin embargo, si (2) ha de ser lógicamente verdadero, su verdad debe estar garantizada por la existencia de objetos lógicos exclusivamente. En otras palabras, debería haber por lo menos $k+1$ objetos lógicos. Finalmente, esto contradice el supuesto de que tan solo hay k objetos lógicos, con lo que dicho supuesto queda reducido a un absurdo.

Concluyendo, cualquiera que crea en la existencia de objetos lógicos, debe aceptar la existencia de por lo menos un número infinito de ellos. Sin embargo, y por supuesto, el tema de Silvio Pinto no es el Axioma del Infinito, sino el de Reducibilidad (AR). Pasemos, pues, a la discusión de éste.

§2. El Principio del Círculo Vicioso (PCV) de Russell es, ante todo, un principio restrictivo. En su primera formulación (PCV_1), nos dice que una colección no debe incluir objetos que involucren la totalidad de dicha colección. En tanto no se clarifique qué significa que un objeto "involucre la totalidad" de una colección, dicho principio no puede introducirse de manera rigurosa en una teoría lógica. Es por eso que aparece una segunda formulación (PCV_2), en la que la apelación al vago criterio de 'involucramiento' es sustituida por un criterio explícitamente lingüístico. En esta segunda formulación, (PCV_2) excluye definiciones (no colecciones) de cierto tipo: aquellas que se aplican a miembros de colecciones en cuyos términos está formulada ella misma. El objetivo de la teoría de tipos, entonces, no es más que el intento de proveer una sintaxis lógica en la que (PCV_2) pueda expresarse de manera rigurosa.

Nótese que en cada formulación del principio, lo que se limita es distinto. En la primera formulación, lo que se limita es un tipo de colecciones. En la segunda formulación, en contraste, lo que queda limitado por el principio es un tipo de definiciones.

Al igual que (PCV), la Teoría Ramificada de Tipos (TRT) restringe el tipo de colecciones y definición lógicamente aceptables (y, por supuesto, ambas restricciones tienen el mismo objetivo: evitar las paradojas). Aunque Silvio no lo hace explícito, al igual que la Teoría Simple de Tipos (TST), (TRT) consta de dos partes: una tipología de objetos y expresiones – la teoría de tipos propiamente dicha – y un principio sintáctico restrictivo basado en tal tipología. En la tipología de (TRT), toda expresión pertenece a un solo orden lógico (de acuerdo al tipo de variables libres que ocurren en él) y tipo lógico (de acuerdo a sus variables ligadas). La combinación de esta tipología con la prescripción de que "el tipo lógico de las entidades ligadas por la relación de pertenencia deben ser diferentes" (p. 4) tiene el mismo efecto restrictivo que (PCV) y, por lo tanto, sirve para eliminar las paradojas.

Ahora bien, es importante no confundir (TRT) o (TST) con ninguna de las dos formulaciones previas de (PCV).[3] Es por ello desconcertante que, en su explicación de cómo (TRT) evita la paradoja del mentiroso (p. 7), Silvio no apele ni a la tipología ni al principio restrictivo de (TRT), sino exclusivamente a (TCV_1).

Sin embargo, el verdadero problema de (TRT) no es que no logre excluir las paradojas, sino, por el contrario, que excluye demasiadas cosas. Silvio apunta: "El propio

[3]. En un cierto sentido, si se quiere, podría decirse que las dos teorías de tipo de Russell, tanto (TST) como (TST) son otras dos formulaciones, más rigurosas, de (PCV). De cualquier manera, no deben confundirse ni con (TCV_1) ni (TCV_2).

Russell tenía claro que uno de los problemas creados por (TRT) es que, además de eliminar las paradojas, también impide la generación de totalidades por medio de las definiciones llamadas impredicativas.” (p. 8) Desafortunadamente, el análisis de los números reales requiere de muchas funciones que, bajo (TRT) quedarían excluidas por impredicativas. Para ‘minimizar estos efectos nocivos’ (p. 9), Russel introdujo el Axioma de Reducibilidad (AR) que afirma la existencia de funciones predicativas co-extensionales para toda otra función. De cualquier manera, el intento de Russell por rescatar su (TRT) fracasó. Pronto, Wittgenstein, Ramsey y Waismann mostraron contraejemplos que ponían en duda la necesidad y, por lo tanto, logicidad de (AR). “El logicismo de la primera edición de *Principia* – concluye Pinto – era, todos estaremos de acuerdo, totalmente insostenible.” (p. 13)

§3. Sin embargo, al igual que con el Axioma del Infinito, hay algo que me inquieta de los argumentos de Ramsey, Waismann y Wittgenstein en contra (AR). Silvio acierta al señalar que estos argumentos están basados en una concepción distinta de *proposición lógica* que la de Russell. Para éste, señala Pinto, las proposiciones lógicas se caracterizan por la completa generalidad con que son expresables. El Axioma de Reducibilidad satisface este criterio y por lo tanto, de ser verdadero, lo sería de forma lógica. Para Wittgenstein, y la gran mayoría de los lógicos posteriores, una proposición lógica se caracteriza mantener su valor de verdad en todo mundo lógicamente posible. Es bajo este último criterio que (AR)no es lógico, según los argumentos de Wittgenstein, Ramsey y Waismann. En tanto hay mundos posibles en que el enunciado es falso, aún de ser verdadero, el Axioma no podría ser lógicamente verdadero.

Pinto resume la condición en que (AR) podría ser falso, como "aquella en que hay infinitos individuos y además no hay funciones predicativas de extensión finita (contra-ejemplo de Wittgenstein) o de extensión unitaria (contra-ejemplo de Ramsey-Waismann)." (p. 12) De ahora en adelante, llamare a éstas Condiciones de Ramsey, Waismann y Wittgenstein (CRW). Dado lo dicho anteriormente sobre el Axioma del Infinito, es claro que Russell no podría rechazar la existencia de infinitos individuos. Sin embargo, alguien bien podría replicar que[4], aunque bien podría no haber funciones predicativas de extensión finita o unitara, *de hecho* sí las hay. Claro – respondería el defensor de Ramsey, Waismann y Wittgenstein –, estos argumentos no demuestran que (AR) sea falso, sino que *podría serlo*. Sin embargo, esto es suficiente para que, aunque fuera verdadero, no pueda ser lógicamente verdadero.

El problema, sin embargo, surge cuando nos preguntamos a qué tipo de hecho o hechos nos referimos cuando decimos que *de hecho* hay funciones predicativas unitarias o de extensión infinitas. Si las condiciones (CRW) son falseadas por la existencia de funciones *lógicas*, entonces (CRW) no solo es falso, sino lógicamente falso. En dicho caso, los putativos contrejemplos no lo serían ya que, propiamente, el posible universo que presentan no es un mundo *lógicamente* posible. En otras palabras, lo que los argumentos de Ramsey, Waismann y Wittgenstein demuestran no es que, efectivamente, es lógicamente posible que (AR) sea falso, sino, a lo más, que es lógicamente posible que (AR) *pueda* ser

[4]. Una vez más, reitero mi pobre conocimiento del pensamiento de Russell, y no pretendo implicar que los argumentos que introduzco a continuación le pertenecen o siquiera son compatibles con el resto de su filosofía. Sin embargo, sí son consistentes con la parte presentada por Silvio

falso. A menos que uno acepte los principios lógicos de *S5*, es aún necesario mostrar que (CRW) efectivamente es satisfacible en un mundo actualmente posible.

Permítaseme presentar una vez más el contra-argumento. Partamos de la posibilidad de formular funciones predicativas unitarias en (TRT). En tanto (TRT) es una teoría lógica, las funciones en ella definida son funciones lógicas. En tanto objetos lógicos, su existencia debe ser compartida por todo mundo lógicamente posible. Por lo tanto, no existe ningún mundo lógicamente posible en el que no existan funciones predicativas unitarias. Por lo tanto, el contra-ejemplo de Ramsey-Waismann, pese a ser efectivamente imaginable, no corresponde a un mundo lógicamente posible. Un contra-argumento similar puede usarse en contra del contra-ejemplo de Wittgenstein. En ambos casos, el error – si hemos de llamarlo así – es pasar sin reparos de mundos meramente imaginables a mundos lógicamente posible. Para que un mundo sea lógicamente posible es necesario, por lo menos, que en él se cumplan las verdades lógicas. Aún independientemente de (AR), es fácil construir por lo menos una función lógica predicativa unitaria (contra Ramsey-Waismann) o infinita (contra Wittgenstein) en (TRT). De ahí que sea lógicamente verdadero que dichas funciones existan y todo mundo imaginable en el que no lo hagan sea lógicamente imposible.

Al igual que con el Axioma del Infinito, los argumentos en contra de (AR) parecen ignorar la distinción ontológica entre objetos lógicos y no-lógicos. La existencia de los primeros, más no de los segundos, es asunto de lógica y no de imaginación.