FORMALIZACIÓN

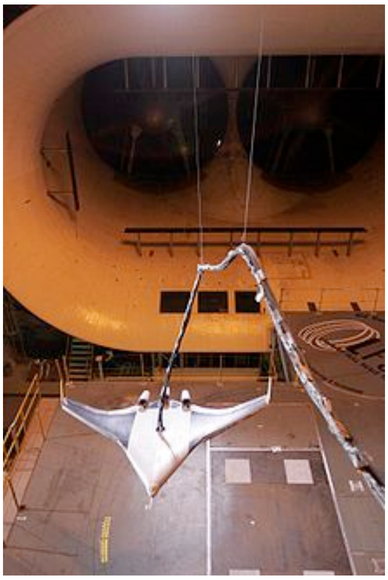
Axel Arturo Barceló Aspeitia

Borrador de Conferencia

– Lógica Clara –

1. Modelos Filosóficos

En la filosofía, al igual que en muchas otras ciencias, una de las herramientas más poderosas con las que contamos son los modelos. Al igual que en el resto de las ciencias, en filosofía usamos modelos cuando nos es difícil mostrar o explicar algo de manera directa. A decir verdad, se puede decir que los argumentos que usan modelos son un tipo de argumentos por analogía, ya que explotan la analogía entre el fenómeno a estudiar y el modelo. La idea detrás del uso de un modelo es muy sencilla. Un modelo es un objeto, concepto o sistema que representa el fenómeno que nos interesa de manera tal que podemos estudiar ciertos aspectos de él a través de aspectos análogos del modelo. Para dejar un poco más claro el papel que juegan los modelos en ciencia, piensen en el uso de túneles de viento en la ingeniería aeronáutica.



Si queremos estudiar el los efectos del movimiento del aire alrededor de un tipo de avión, no usamos un verdadero avión para nuestra prueba, sino un modelo a escala; y no lo ponemos a volar en el aire, sino que lo observamos al interior de una cámara dentro de la cual hacemos pase aire a alta velocidad. Aunque no sea un avión propiamente dicho, dicho modelo compartirá ciertas características con el tipo de avión que representa, dependiendo de qué nos interese estudiar sobre él. Si nos interesa saber cómo afecta la forma de las alas la estabilidad de la nave, por ejemplo, es de suponer que reproduciremos dicha forma en el modelo. Es decir, es muy sensato que el modelo tenga alas de la misma forma. Igualmente, el aire que corre por el túnel no es un viento propiamente dicho, pero comparte las suficientes características para que le sirva como modelo. En general, queremos que el modelo sea lo suficientemente similar a aquello que representa cómo para poder sacar conclusiones sustanciales de su comportamiento; pero también queremos que sea diferente, en el sentido de que sea más manejable, para que tenga sentido usarlo.

Lo mismo sucede en filosofía, al estudiar la relación entre objetos (o, lo que es más común en el caso de la filosofía, conceptos) también solemos echar mano de modelos. Los modelos más comunes en filosofía suelen ser modelos formales, ya sean matemáticos o computacionales. El área que más ha explotado este tipo de modelos es la lógica, dónde no solemos estudiar los argumentos o proposiciones de manera directa, sino a través de modelos formales. Estos modelos funcionan, tan sólo en cuanto representan los aspectos relevantes del fenómeno a estudiar, pero de una manera más manejable. En lógica, formalizar, en este sentido, significa modelar formalmente (es decir, producir un modelo formal de) una proposición, argumento, teoría o lenguaje, para explicar o entender mejor sus propiedades y relaciones lógicas como validez, consistencia, consecuencia lógica, incompatibilidad, etc.

La formalización es una herramienta. La lógica es una ciencia filosófica. Sus teorías son teorías filosóficas, pero sus modelos son matemáticos. De esta manera, la lógica matemática es matemática en el mismo sentido que lo es, digamos, la mecánica newtoniana. En ambos casos, se usan modelos matemáticos, pero ellas mismas <u>no</u> son matemáticas. Por principio de cuenta, las teorías de ambas ciencias cargan un peso verificativo. Sus resultados no dependen de manera exclusiva de los principios postulados por ellas mismas, sino en su capacidad de explicar, de manera científica, fenómenos que le son externos e independientes. En la lógica, al igual que en la mayoría de las ciencias, no sólo existe la teoría, sino también la evidencia. Las teorías lógicas, como teorías científicas de la lógica, no son teorías matemáticas. Otra distinción importante que debe hacerse respecto al método matemático – de la ciencia en general, y de la lógica en particular – es entre los sistemas lógicos formales, también llamados teorías formales, y las teorías lógicas (filosóficas) propiamente dichas. Un sistema lógico formal es una entidad matemática compleja.

Tradicionalmente, consiste de un alfabeto, un conjunto de formulas bien formadas, un conjunto de reglas de inferencia y, en algunos casos, un conjunto de axiomas. En tanto objeto matemático, todo sistema lógico formal tiene propiedades matemáticas. Algunas de ellas (las así–llamadas propiedades sintácticas) son internas, mientras que otras (las así–llamadas propiedades semánticas) son externas, es decir, se predican tan sólo en relación a otro sistema matemático (a veces meramente posible) comúnmente llamado su modelo.[1] Algunas de las propiedades matemáticas de los sistemas formales pueden expresarse como propiedades, relativas-al-sistema, de alguno de sus elementos. Por ejemplo, cuando uno dice que $\forall x\,(Px \supset (Qx \supset Px))$ es un axioma del sistema L de la lógica de primer orden, esto puede entenderse tanto como una propiedad del sistema formal L – que tiene a esa formula como una de sus premisas –, como una propiedad de la mentada formula – que es una axioma – relativa a L. Es en este sentido que uno puede decir que los sistema lógicos formales "afirman, o preferentemente prueban, resultados a cerca de sus expresiones simbólicas (en jerga moderna, las 'formulas' de su 'lenguaje')." (Kirwan, 1995) Llamemos locales a este tipo de propiedades, y globales a aquellas que no pueden expresarse mas que como propiedades del sistema lógico formal en su conjunto. Ser un teorema o un axioma son ejemplos paradigmáticos de propiedades locales, mientras que la consistencia, la compacidad, etc. son ejemplo típicos de propiedades globales de los sistemas lógico formales.

Es muy importante no confundir estas propiedades matemáticas de los sistemas formales con propiedades lógicas propiamente dichas. Las propiedades y relaciones que son el objeto central de estudio de la lógica – la consecuencia lógica, la verdad lógica, etc. – no son propiedades matemáticas definidas dentro de un sistema formal, sino relaciones y propiedades lógicas reales que se dan de hecho entre entidades lógicas (conceptos, proposiciones o argumentos).

---

[1]. A este ultimo tipo de sistemas matemáticos también puede llamársele 'sistemas formales', pues su papel en la lógica matemática es completamente análogo al de los sistemas lógicos formales tradicionalmente concebidos. Sin embargo, pese a que, en sentido estricto, sería correcto llamarlos así, no lo son. (Por qué es esto es otra pregunta importante que debe de tomarse en cuenta al definir el carácter lógico de la lógica Matemática). Así que en este artículo, me uno a la ortodoxia y tomo a los sistemas lógico formales en su acepción tradicional, esto es, contemplando sólo su así-llamada sintaxis.

Estos sistemas formales son matemáticos, por supuesto, pero no son lógicos sino hasta ser interpretados como describiendo relaciones y propiedades lógicas reales. Esta interpretación es externa al sistema formal. No es meramente matemática, ya que involucra, entre otras cosas, la formalización de entidades lingüísticas externas al propio sistema formal. Esta formalización – también llamada 'simbolización' – no es parte del sistema formal, ni lo puede ser. Aún mas, es poco probable que pueda ser formalizada o matematizada. Es extremamente dudoso que sea posible construir un modelo matemático que contenga las condiciones necesarias y suficientes a satisfacer por todas las posible aplicaciones de un sistema lógico formal (o de cualquier teoría matemática, a decir verdad). Pero, una vez más, éste es un problema filosófico, no uno matemático. Si la matematización es imposible, esto tendría como consecuencia la imposibilidad de reducir las teorías lógicas a sistemas formales, o a sistemas matemáticos en general.

En este respecto, el objeto de los sistemas lógicos formales es construir una correspondencia entre propiedades lógicas y matemáticas. Esta correspondencia se establece a través del establecimiento de un mecanismo sencillo de representación de las entidades lógicas cuyas propiedades serán modeladas por algún tipo de entidades matemáticas constituyentes del sistema formal. Tradicionalmente, esto implica representar proposiciones por fórmulas, argumentos por secuencias de fórmulas, y teorías por conjunto de fórmulas. Este mecanismo es comúnmente llamado 'formalización' o 'simbolización', y se dice que las entidades matemáticas 'formalizan' o 'simbolizan' las entidades lógicas que representan.

También es necesaria establecer una correspondencia análoga al nivel de propiedades. Es necesario representar las propiedades lógicas bajo propiedades matemáticas. Comúnmente esto se logra estableciendo una correspondencia uno-a-uno entre la propiedad matemática de ser un teorema y la propiedad matemática de ser lógicamente verdadera, entre la propiedad matemática de deducibilidad y la propiedad lógica de validez, etc. Para hablar de esta correspondencia también se usan los términos, 'formalización' y 'simbolización.' Lo que estas dos correspondencias establecen es una <u>interpretación lógica</u> del sistema formal. Solo una vez que estas correspondencias han sido establecidas es que podemos hablar de una verdadera teoría lógica (matematizada). Una teoría lógica matematizada, en este sentido, involucra tanto al sistema formal como a su interpretación lógica.[2] En consecuencia, una teoría de lógica Matemática no es mas que un sistema formal, lógicamente interpretado.

Idealmente, la correspondencia entre lógica y sistema formal debe ser tal que una entidad matemática a tenga la propiedad matemática P, en caso y solo en caso de que la entidad lógica simbolizada por a tenga la propiedad lógica simbolizada por P. Por ejemplo, en la interpretación tradicional de sistemas lógicos formales correctos,[3] una fórmula es teorema del sistema si y solo si la proposición que ella simboliza es una verdad lógica en ese mismo lenguaje. Lo que no queremos es que existan relaciones matemáticas donde no haya relaciones lógicas del tipo correspondiente, o que alguna propiedad lógica (simbolizable) escape de nuestro modelo matemático. Es importante que estos deseos no se confundan con las así-llamadas propiedades meta-lógicas de corrección y completud. Estas últimas son propiedades matemáticas de los sistemas lógicos formales, mientras que los primeros son virtudes de los sistemas formales como partes de nuestras teorías lógicas.

La presente distinción entre el sistema formal meramente matemático, sus propiedades meta-lógicas y su interpretación lógica es análoga a la distinción que Raymundo Morado hace en "La Rivalidad en lógica" (1984) entre 'sístema lógico', 'metalógica' y 'filosofía de la lógica.' Para Morado,

> Entenderé por la expresión "una lógica X" algún conjunto en particular que comprehenda un sistema lógico (entiendo que éste incluye tanto una sintaxis como una semántica), una metalógica en la que se ubican los metateoremas sobre el sistema, y una filosofía de la lógica que trate de esclarecer la trama de relaciones entre el sistema lógico, el pensamiento y la realidad. (Morado 1984, p. 238)[4, 5]

---

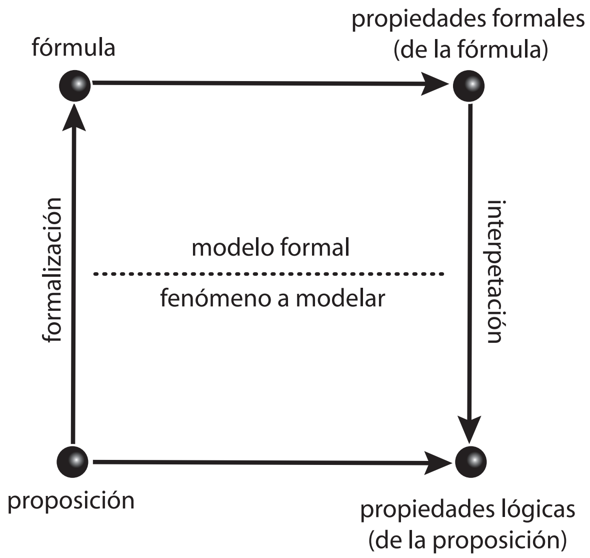
[2]. Nótese que esta última es esencial.

[3]. Consistentes y completos.

[4]. Pese a lo que podría sugerir esta cita aislada, Morado no cree que toda 'lógica' sea de este tipo, es decir, que toda lógica sea matematizada en mi sentido. La afirmación de Morado debe entenderse en el contexto de su discusión de la rivalidad en lógica. Las lógicas cuya rivalidad Morado estudia en este artículo son, de hecho, matematizadas. Sin embargo, de ello no se sigue que toda lógica sea matematizada.

[5]. Morado encuentra antecedentes de esta distinción en el trabajo de Lungarzo (1984). Mi distinción, en cambio, encuentra inspiración en el trabajo de Kirwan (1995) sobre los diferentes tipos de verdades lógicas.

Resumiendo, el mecanismo básico de todo modelo es muy sencillo:



A través de la formalización se le asigna a la proposición que se busca modelar (es decir, que se busca analizar lógicamente) una fórmula que le sirva de modelo. Una vez que tenemos la fórmula, podemos usar el método formal que nos guste – tablas de verdad, deducción natural, árboles semánticos, etc. – para determinar las propiedades formales que, si hicimos bien la formalización, deben corresponder a las propiedades lógicas de la proposición que nos interesan. Por ejemplo, supongamos que queremos saber si la proposición expresada por el enunciado "María vive en París y no conoce España" es lógicamente verdadera o no. El primer paso es formalizarla. Si usamos lógica de primer orden, le podemos asignar la fórmula $P(a)\&\neg C(a, e)$. Usando nuestras herramientas de teoría de modelos, podemos ver fácilmente que la fórmula no es tautológica. Sabemos que si *a* no cae bajo la extensión de *P*, la fórmula es falsa y, por lo tanto, que hay por lo menos una interpretación de la formula que la hace falsa. Si hicimos bien la formalización, podemos inferir que la proposición original, la que convencionalmente expresamos con el enunciado "María vive en París y no conoce España", no es una verdad lógica. En particular, sabemos que si María no vive en parís, es falso que María vive en París y no conoce España. La ventaja de usar el modelo formal, es decir, la ventaja de usar fórmulas en vez de estudiar las proposiciones directamente de los enunciados, es que tenemos mecanismos bien definidos para analizar éstas que son mucho más sencillos y patentemente confiable que cualquier tipo de análisis directo que se nos haya ocurrido. Esa es la razón por la cual formalizamos.

2. Lo que se formaliza NO son enunciados, sino proposiciones.

Una segunda analogía que nos puede ayudar a entender mejor la formalización en lógica es ya vieja y conocida: la formalización como traducción. Recórdemos que un buen traductor no pasa directamente del enunciado en un lengauje a su tarducción en otro. El buen traductor no es quién sabe cómo pasar palabra por palabra de un lenguaje a otro. Mas bién, el buen traductor aprovecha su conocimiento del primer lenguaje (y del contexto en el cual se usa el enunciado a traducir) para identificar la proposición expresada y luego explota su concoimiento del otro lenguaje, ellenguaje al cual se busca traducir el enunciado, para expresar la misma proposición de la manera más natural, dado el contexto. El buen traductor, por lo tanto, es uno que conoce muy bien ambos lenguajes y no subordina su conocimiento de uno al otro. El buen traductor, no pasa directamente de uno al otro, sino a través de la proposición expresada; y en este sentido, lo que traduce no es, en sentido estricto, *el enunciado*, sino la *proposición* expresada. Lo que le interesa no son las palabras o los enunciados, sino lo que éstas expresan.

Lo mismo sucede con la formalización: un buen formalizador no pasa directamente y palabra-por-palabra del enunciado del lenguaje natural a la fórmula, sino que primero se detiene a identificar la proposición expresada por el enunciado original en su contexto, y sólo una vez que ha identificado la proposición, aprovehca su conocimeinto del sistema formal en el que hará la simbolización para bsucar la mejor manera de representar en él la forma lógica de la proposición en cuestión. En este sentido, bien podemos decir que lo que se formaliza NO son enunciados, sino proposiciones (y lo que se representa directamente es su forma lógica). Las propiedades y relaciones lógicas que nos interesan, de las que tratamos de dar cuenta a tarvés de la formalización son propiedades (y relaciones) de las proposiciones expresadas por los enunciadsos (en sus contextos), no de los enunciados mismos; y el lenguaje formal no es parasítico del natural.

Formalizar es, en este sentido, *como* traducir, peor no es *realmente* traducir. El buen traductor no pasa diectamente de un lenguaje al otro, sino que trata de entender lo que se quiere decir en un lenguaje y luego lo trata de expresarlo en el otro. Comúnmente, lo que se trata de preservar en la traducción es el contenido, de tal manera que ambos enunciados, en cada lenguaje, tengan el mismo contenido, o contenidos lo más parecidos posibles. En la formalización, en contraste, queremos *eliminar* mucho del contenido expresado en el lenguaje natural, pues lo único que nos interesa es aquello que es lógicamente relevante. No nos interesa *todo* el contenido, sino sólo su así-llamada “forma lógica”. Es por eso que formalizar no es traducir sino modelar.

3. ¿Cómo sabemos si hemos formalizado bien?

Cómo he mencionado, cuando hemos formalizado bien, podemos inferir de ciertas propiedades formales de fórmulas, a análogas propiedades lógicas de proposiciones (argumentos, teorías, lenguajes, o lo que sea que nos interese estudiar). Esto ha llevado a muchos a preguntarse, por supuesto, ¿cómo sabemos si hemos formalizado bien algo? La respuesta no es obvia ni sencilla y ya se la hacían lógicos como Ramsey y Russell a principios del siglo pasado. ¿No sería increíble que, así como tenemos mecanismos sencillos de prueba como las tablas de verdad, etc., tuviéramos también un mecanismo sencillo de formalización o, de perdida, uno que nos diga si formalizamos bien o mal?

Por un lado, hay quienes piensan que es posible lograrlo y se han dedicado a diseñar métodos y programas computacionales que formalizan mecánicamente enunciados de lenguaje natural, y si bien hay avances significativos en esta dirección, aún no contamos con el santo grial de la formalización automatizada. Muchos filósofos piensan que es imposible. Después de todo, piensan, para saber si la formalización de la proposición expresada en un enunciado es correcta, uno debe poder identificar dicha proposición. Sin embargo, en la mayoría de los casos, identificar la proposición expresada en un enunciado requiere tomar en cuenta el contexto en el que éste se usa, y no hay manera en que podamos incluir toda la información necesaria para saber cómo explotar el contexto para determinar la proposición expresada por cualquier enunciado en cualquier contexto o circunstancia.

Sin embargo, aún si no contamos con un método mecánico de formalización o verificación de formalizaciones, esto no significa el mayor problema para el lógico formal. Recordemos lo que hemos dicho desde el principio en esta plática: la formalización es una herramienta para el análisis lógico de proposiciones. Como tal, no tiene mucho sentido preguntarse si es la herramienta adecuada para el trabajo, antes de aplicarse a la tarea en cuestión. Ya decía Wittgenstein, que si queremos saber si una herramienta sirva para algo, lo mejor es simplemente tratar de usarla para eso. Si funciona, bien; si no, pues ya sabemos que no sirve para eso. Lo mismo se aplica a las formalizaciones. La mejor manera de saber si una formalización es correcta es aplicarla y ver si los resultados que ofrece son los deseados.

En este respecto, vale la pena hacer una analogía más. Pensemos ahora en la cartografía, es decir, en la elaboración de mapas. Un mapa es también un modelo, una representación (a escala) de un objeto (un territorio) que incluye de manera perspicua y fácilmente manejable la información sobre dicho objeto que nos interesa y excluye otra información que es relativamente irrelevante. Si el mapa es orográfico, por ejemplo, el mapa representa de manera clara y explícita información sobre los mapas y cordilleras que pueblan la región en cuestión, y probablemente excluya toda información sobre el clima o la distribución de ecosistemas en la misma (información esencial para otro tipo de mapas). Ahora bien ¿cómo se hace un mapa de este tipo? Presumiblemente, explorando el territorio, tomando fotografías aéreas, etc. Al principio, los primeros mapas de un territorio son bastante escuetos, pero conforme nuestro conocimiento del territorio progresa, los mapas se van refinando, depurando tanto la calidad de la información que contienen (haciéndolos más fieles al territorio) como las técnicas de representación de dicha información. Y no es sólo a través de una mayor exploración del territorio que podemos mejorar nuestros mapas, sino también a través de la experiencia directa de usar los mapas. ¿Cómo sabemos que un mapa contiene un error (o, en general, que no sirve bien para el propósito para el que fue diseñado)? Probablemente, una de las maneras más comunes sería directamente en el uso. Si al seguirlo nos perdemos, si no encontramos las cosas donde el mapa dice que deberían estar, podemos inferir que algo salió mal. Esto significa que hay un ir y venir entre la exploración del territorio y la elaboración de mapas. La exploración nos da información directa sobre el territorio que podemos usar para crear un mapa, y luego podemos usar dicho mapa para hacer nuevas exploraciones, las cuales a su vez pueden darnos más y mejor información para nuestros mapas y así . . . Este proceso de mutua retroalimentación entre uso y herramienta es un caso de lo que comúnmente se llama *bootstrapping*, y lo mismo sucede en el campo de las formalizaciones lógicas. Debemos empezar explotando la poca o mucha información pre-teórica que tenemos sobre el comportamiento lógico de la proposición para identificar su forma lógica. pero no debemos pensar que la formalización debe salir a la primera. Es muy probable que nuestra primera propuesta de formalización sea muy rudimentaria, y que necesitemos ver que tan bien salen os resultados de la formalización para ver si efectivamente fue la buena, o es necesario corregirla. Es necesario un ir y venir entre nuestras intuiciones lógicas sobre la forma lógica de la proposición y las propiedades formales de la fórmula que le asignamos. Las formalizaciones se verifican en su uso y, en ese sentido, la mejor (y tal vez única) manera de aprender a formalizar es formalizando.

Axel Arturo Barceló Aspeitia

Abril 2011