¿Qué tan Matemática es la Lógica Matemática?

Introducción

Tal y como su título lo indica, el objetivo de este artículo es responder a la pregunta ¿Qué tan matemática es la lógica matemática?[1] En sí misma, la respuesta es sencilla: La lógica matemática es matemática en tanto usa herramientas matemáticas. En este sentido, la lógica matemática lo es en el mismo sentido que lo es, digamos, la mecánica newtoniana. En ambos casos, el método es matemático, pero ellas mismas – las ciencias mismas – no son matemáticas, pues su objeto de estudio pertenece a una realidad independiente. Qué tan independiente sea esta realidad depende de la posición que uno quiera tomar respecto al carácter objetivo de la lógica. Para acentuar el contraste entre objeto de estudio y herramientas, presentaré al quehacer de la lógica matemática en el marco de un realismo lógico de tipo metodológico.

Este marco realista es desarrollado en la primera sección del artículo, para luego, en la segunda sección, explicar en más detalle la separación entre el objeto de estudio de la lógica y sus herramientas matemáticas. La tercera sección está dedicada a explicar la naturaleza matemática de estas herramientas. Aclarar la naturaleza de estas herramientas servirá también al propósito de puntualizar en qué sentido se dice que esta lógica matemática es formal y simbólica. Para lograr esto, trazaré una liga histórica entre el desarrollo de lo

[1]. Para responder a esta pregunta es necesario suponer cierta caracterización de la lógica y las matemáticas. A este respecto, tomo una posición naturalista, ceñida a las practicas actuales en lógica y matemática. Cuando doy por sentado, por ejemplo, que ciertas relaciones y propiedades como la consecuencia lógica, la validez, la consistencia, etc. son lógicas, ignoro la pregunta de qué hace que estas propiedades y relaciones sean lógicas. No pretendo más que reportar el objeto de estudio de la lógica actual, sin asumir ninguna naturaleza lógica que la distinga de manera esencial de las propiedades y relaciones no-lógicas. De la misma manera, mi somera caracterización de las propiedades matemáticas en la segunda sección de este artículo no descansa más que en un reporte de las practicas matemáticas actuales (apoyada en el trabajo de Stewart Shapiro y Penélope Maddy), sin asumir ninguna 'esencia' de lo matemático. Los resultados de estas aproximaciones naturalistas son suficientes

formal y lo simbólico en matemáticas y el origen y desarrollo de la lógica moderna. Si bien creo que lo dicho en las primeras dos secciones de este artículo no es en lo absoluto original ni innovador, sino, por el contrario, expresa sólo la opinión común de la mayoría de los lógico-filósofos actuales, esta última sección, en contraste, tiene el objetivo de desmantelar ciertos mitos sobre el carácter formal y simbólico de la lógica matemática.

1.1. Realismo Lógico

En una discusión reciente,[2] mi colega Ivan Antonowitz, usó una excelente analogía para explicar el objeto de estudio de la lógica. Dijo que los pensamientos son a la lógica lo que la visión es al espectro electromagnético. Mientras que, sin el auxilio de instrumentos, lo que captamos a través de la vista es sólo un sector del espectro electromagnético, así también nuestro pensamiento, por sí sólo, es incapaz de captar la totalidad de las conexiones lógicas entre teorías, proposiciones, conceptos, etc. Esta afirmación contiene de manera condensada la tesis central de lo que se ha llamado Realismo Lógico: La idea de que las conexiones lógicas, el objeto de estudio de la lógica, tienen una existencia objetiva, cuyo descubrimiento y estudio sistemático es el objetivo de la ciencia lógica.

Esta noción de realismo lógico ha sido caracterizada por Michael D. Resnik en (2000) de la siguiente manera:

> Logical realism is committed to at least two theses: First, there is a fact of the matter of whether something is a logical truth, a logical inconsistency or logically implies something else. (We can put this less contentiously as the thesis that claims about logical truth, etc. are true or false.) Second, that such facts (or the truth-values of such claims) are independent of us, our psychological make-up, our linguistic conventions and inferential practices. In

para el objetivo central de esta trabajo: clarificar el carácter matemático, formal y simbólico de la lógica matemática, tal y como ésta se practica hoy en día.

2. El 25 de Febrero del 2002, para ser más exactos.

> other words, logical realism claims that matters of logic turn upon matters of fact and that these facts are not grounded in us or our practices. (p. 181)[3]

Sin embargo esta manera de presentar la objetividad de la lógica como cierto tipo de independencia equivoca la relación entre lógica, lenguaje, pensamiento y práctica inferencial. La lógica, aún bajo supuestos realistas, no presume completa independencia de estos aspectos. Por lo tanto, es necesario hacer ciertas aclaraciones respecto al sentido en que la lógica es independiente del pensamiento, el lenguaje y nuestras prácticas inferenciales concretas.

En su respuesta a "How are Objective Epistemic Reasons Possible?" de Paul Bogghossian (2001), Crispin Wright (2001) deja claro que la verdadera antítesis de la objetividad no es el escepticismo, sino el relativismo. Si la lógica no fuera objetiva, no dejaría de ser conocimiento, sino que sus verdades pasarían a ser relativas: relativas a la factura psicológica del hombre, a sus convenciones lingüística y su práctica inferencial.[4]

Dado que el objeto de estudio de la lógica es una serie de propiedades – como validez lógica – y relaciones – como relaciones de equivalencia, consecuencia, incompatibilidad lógica, etc. – entre entidades como teorías, proposiciones, conceptos y demás, el realismo lógico está comprometido con la existencia objetiva de estas relaciones y propiedades. En términos de Resnik, estamos comprometidos con la objetividad de los hechos lógicos. Esta objetividad se sustancializa en términos de su independencia de aspectos tales como las convenciones lingüísticas, la psicología humana y las prácticas inferenciales de agentes racionales concretos. Sin embargo, debemos notar que el compromiso con la objetividad e

---

[3]. Este artículo es el desarrollo de una sección homónima de (1987, p.p. 162–166), cuya definición de realismo también es refinada en (2000).

[4]. Dado que aquí no me ocupo de la objetividad de la justificación del conocimiento lógico, sino de la objetividad de su contenido, el resto de la discusión entre Wright y Boghossian es irrelevante al problema del realismo lógico tal y como aquí lo entiendo. La única moraleja que quiero rescatar de su discusión es que la objetividad no es una propiedad epistémica, sino metafísica.

independencia de estos hechos no implica un compromiso con la objetividad y absoluta independencia de los objetos que en ellos ocurren. Por ejemplo, el realismo lógico afirma que ciertas proposiciones se siguen de manera objetiva de otras, pero no que dichas proposiciones existan de manera completamente independiente de las particularidades concretas de nuestro lenguaje, pensamiento o prácticas inferenciales. En general, el realismo lógico no se compromete con la existencia objetiva e independiente de objetos tales como teorías, proposiciones, conceptos o modelos.[5] A decir verdad, es indiferente a su estatus ontológico.

Esta situación es común a todas las ciencias con pretensiones de objetividad. La lingüística, por ejemplo, no deja de ser una ciencia objetiva por el simple hecho de estudiar objetos y fenómenos dependientes, en un sentido fuerte, de nuestras convenciones lingüísticas. Igualmente, la psicología y la sociología tampoco pierden su carácter objetivo por ocuparse de objetos fuertemente determinados por nuestra psicología – válgase la redundancia – y nuestras prácticas humanas. Su objetividad descansa en otro lado.

Por otro lado, si bien el realismo lógico es indiferente al estatus ontológico de los objetos lógicos, es claro que, en la práctica lógica, los filósofos asumimos que estos objetos no son meramente lógicos, sino que también existen en otras dimensiones de la realidad. La gran mayoría de los lógicos asumimos que las proposiciones, los conceptos, etcétera tienen otros aspectos aparte de los estudiados por nuestra disciplina. No son pocos los que creemos que los enunciados expresan proposiciones (relativas a un contexto de emisión asertiva), o que ellas son el contenido de algunos de nuestros pensamientos, o que están involucrados de alguna manera en los procesos de inferencia. Algo similar puede decirse de los conceptos y

[5]. De ahora en adelante, llamaré a éstos objetos lógicos. Sin embargo, debe quedar claro por el contenido de esta sección que cuando sostengo la independencia objetiva de los hechos lógicos, no estoy argumentando por la existencia independiente de sus objetos.

el resto de los objetos cuyas propiedades estudiamos.[6] Asumir esto nos permite creer en la aplicabilidad de nuestra ciencia. Si no creyéramos, por ejemplo, que contamos con algún mecanismo cognitivo que nos permite capturar conexiones lógicas entre los contenidos de nuestros pensamientos, no podríamos decir que la lógica tiene algo que decir sobre la validez de nuestros razonamientos. Igualmente, sin asumir la capacidad de nuestro lenguaje para expresar proposiciones, no podríamos aplicar la lógica a argumentos y enunciados del lenguaje natural. En este sentido, la aplicabilidad de la lógica va en contra de la completa independencia de los objetos lógicos, pero no en contra de la objetividad de sus hechos.

Ahora bien, si aceptamos por un lado, que existen hechos psicológicos, lingüísticos y sociales objetivos, y por el otro, que los objetos lógicos pueden ser o estar instanciados en objetos lingüísticos, psicológicos o socialmente determinados, ¿en qué sentido requiere la objetividad lógica de una independencia de la psicología, la lingüística y la sociología? ¿Qué relación existe entre objetividad e independencia? La respuesta es sencilla. La objetividad de la lógica descansa en la autonomía de sus hechos. Descansa en la independencia de su dominio de hechos, no de su dominio de objetos. En otras palabras, la lógica es objetiva porque los hechos lógicos no son (reducibles a) hechos psicológicos, sociales o lingüísticos.

1.2. Objetividad y Realismo

De acuerdo a Resnik, la objetividad de los asuntos de la lógica es una de las razones más fuertes a favor del realismo lógico. Sin embargo, presentar las cosas de esta manera es equívoco, ya que sostener el realismo lógico no es sino reconocer la objetividad de la lógica.

[6]. Es importante notar que esto no entra de manera alguna en contradicción con la dimensión anti-psicologista del realismo lógico, tal y como lo muestra Anthony Palmer en el primer capítulo de (1998), donde cita a Moore, diciendo: “Concepts are possible objects of thought; but this is no definition of them. It merely states that they may come into relation with a thinker; and in order that they may do anything, they must already be something” (Moore, 1899, p. 179) apud p. 13.

Resnik mismo lo concede al distinguir entre la explicación realista de la objetividad de la lógica, de la posición anti-realista que tan sólo trata de explicar la aparente objetividad de la misma (Resnik 1987, 185). En su "Realist Manifesto" (Shapiro 1997), Stewart Shapiro hace la misma conexión entre realismo y objetividad con respecto a las matemáticas. Ahí, Shapiro implícitamente presenta al realismo como la única posición consistente con la objetividad de las matemáticas. De acuerdo con él, el anti-realista no puede explicar la objetividad de un conocimiento, sino tan sólo su aparente objetividad. Aceptar la objetividad, at face value, es ya tomar una posición realista.

Sin embargo, también es importante reconocer que la adopción del realismo lógico no implica comprometerse con un monismo lógico, es decir, con el "supuesto generalizado en la filosofía contemporánea de la lógica de que existe una lógica verdadera, que existe una y sólo una respuesta correcta a la pregunta de si un argumento es [deductivamente] válido." (Beall y Restall, En Prensa.) En otras palabras, el realismo no se encuentra en oposición al pluralismo, como ya lo han reconocido Beall y Restall, cuando dicen:

> Many appeals to 'Real Validty' are appeals to real validity; they are not, however, appeals to the only real validity. (2000, p. 481)

Si bien es cierto que el pluralismo lógico es un tipo de relativismo, en tanto rechaza la idea de una validez absoluta, no se encuentra en oposición al realismo y la objetividad de los hechos lógicos porque no relativiza la validez a elementos extra-lógicos, como las ya mencionadas convenciones lingüísticas, o arquitectura psíquica. El pluralismo lógico simplemente reconoce que la validez puede ser predicada sólo en relación a ciertas condiciones Lógicas. En este sentido, el pluralismo lógico es un tipo de relativismo interno, y por lo tanto, compatible con el realismo.

1.3. Lógica Formal e Informal

Lo que sí es acertado de la crítica de Resnik es el plantear la normatividad como un problema para el realismo lógico:

> On the other hand, the realist account has much more to explain [than competing anti-realists accounts]: . . . it must also explain how these facts [of logic] are related to our logical values. It must explain why, for example, an argument is incorrect –which seems to be a matter of value– if its premises fail to logically imply its conclusion –which is a (supposed) matter of fact. (Resnik 2000, p. 185)

Para responder a esta crítica, es necesario echar mano de la distinción entre lógica formal e informal.

En "How Philosophical is Informal Logic?", John Woods (2000) establece un paralelismo entre la distinción entre lógica formal e informal y la distinción entre la lógica tal y como la entendía Aristóteles y la lógica tal y como se entiende a partir de Gottlob Frege. Según Woods, la silogística aristotélica era sólo una parte del proyecto lógico aristotélico, donde el objetivo final de este último era establecer una teoría de las refutaciones.

> Aristotle wanted his logic for its role in a wholly general theory of argument. The theory of syllogisms was to serve as the logical core of the larger theory; but there was never any prospect of an identity between them. The father of logic wanted among other things, a theory of refutation, a theory that would discipline the distinction between good refutations and good-looking refutations or, as Aristotle himself put it, between genuine and sophistical refutations. (Woods 2000, pp. 139-140)

En contraste, la empresa lógica de Frege no era la construcción de una teoría de la argumentación, sino de la <u>validez</u>. Según Woods, 'lógica' en el sentido aristotélico significaba teoría de la argumentación, mientras que en Frege, 'lógica' significaba teoría de la validez o consecuencia lógica. También según Woods, esta distinción sobrevive en la distinción contemporánea entre <u>lógica formal</u> e <u>informal</u>. Si bien la lógica formal se ha extendido y diversificado de manera considerable desde los días de Frege,[7] Wood tiene razón al señalar

[7]. El ámbito de estudio de la lógica matemática actual ya no se reduce al mero estudio de la validez formal de pruebas matemáticas (como lo había sostenido Frege). En esta sección, al igual que Woods, me centraré en el

que la lógica formal contemporánea es heredera directa de su teoría de la validez, mientras que la lógica informal continúa la tradición Aristotélica y desciende de la teoría de la argumentación.

> In the context of a theory of argument [informal lógic] one possibility is to reserve the generic name of logic [formal logic] for a theory or sub-theory whose target properties are either properties of propositions (e.g. logical truth) or sets of propositions (e.g. consistency), as well as the properties one encounters in the attendant metatheory (e.g., decidability). (Woods 2000, p. 149)

La distinción entre argumento en el sentido de la lógica informal como una práctica humana y argumento en el sentido lógico formal de secuencia de proposiciones es básico para entender la distinción entre lógica formal e informal. Válgase decir, por lo tanto, que el realismo lógico por el que aquí abogo se limita a los objetivos y las propiedades de la lógica formal y que, exceptuando cuando así lo haga explícito, cuando hable de lógica haré referencia a la lógica formal en este sentido.

Una distinción paralela es la distinción entre inferencia y consecuencia lógica. La inferencia es un proceso cognitivo donde se obtiene cierta información a partir de información previa. Dado que la mayoría de las teorías contemporáneas de la proposición las ven a éstas como entidades informáticas, se dice que en un proceso de inferencia se infieren ciertas proposiciones de otras. La inferencia así concebida debe distinguirse claramente de los argumentos en el sentido lógico formal. En su concepción formal, un argumento es un conjunto de proposiciones, una de las cuales es la conclusión y el resto son las premisas. Es un error común el concebir a la conclusión como aquella proposición que se infiere de las

---

caso de la validez formal, porque sirve como un buen ejemplo para resaltar el contraste entre lógica formal e informal. En la siguiente sección, revisaremos en mayor detalle el amplio campo de estudio de la lógica matemática.

premisas. Como es claro por el estudio de inferencias abductivas,[8] la inferencia puede ir tanto en el sentido de las premisas a la conclusión, como de la conclusión a las premisas. En consecuencia, el resultado de la inferencia es la construcción o compleción de un argumento. Como tal, el argumento resultante puede ser evaluado a partir de las normas de la lógica formal ya sea como válido o como no-válido. Vale la pena recordar que un argumento es válido si la conclusión se sigue de manera lógica de las premisas. Por extensión, decimos que una inferencia es lógicamente válida si determina un argumento válido.

El sentido normativo de la lógica se explica a partir del hecho de que uno de los objetivos de la inferencia es capturar una relación de consecuencia lógica.[9] Por ello, podemos evaluar la inferencia en función de su éxito en captar esta relación. Una inferencia es válida si determina un argumento válido, es decir, aquel donde la conclusión se siguen de manera lógica de las premisas. En este sentido, podemos entender a la inferencia como la predicación de una relación lógica entre proposiciones. La predicación es correcta, o verdadera, si la relación predicada efectivamente se da entre los objetos. Decir que esto es un misterio, como parece sugerirlo Resnik, es creer que hay un misterio en la sede misma de la noción de predicación verdadera. Sin embargo, no existe confusión ni misterio entre las dimensiones normativas y descriptivas de la noción de verdad. La validez, en este sentido, es completamente análoga.

Sin embargo, no debemos llevar esta analogía entre predicación e inferencia demasiado lejos. Debemos tener cuidado de no pensar que la validez es un tipo de verdad, o que la inferencia involucra algún tipo de afirmación (de validez). Al hacer una inferencia,

---

[8]. Aliseda (1998), Xiang (2002) y Neal (2000)

[9]. Digo que es tan sólo uno de los obejtivos porque la inferencia se persigue también con otros objetivos. De ello se sigue que la inferencia no puede ser evaluada tan sólo en términos de su validez. Sin embargo, de ello no se sigue que la validez pierda sentido como criterio evaluativo de las inferencias.

uno se compromete con la corrección de la inferencia, mas no afirma la existencia de esta relación. En este sentido, la inferencia no describe cierta relación lógica entre proposiciones, sino que la asume.[10]

Comúnmente, términos como 'razonamiento', 'argumento', 'inferencia' y 'convencimiento' se reservan para teorías lógicas informales, mientras que el vocabulario de la lógica formal está poblado por términos como 'proposición', 'implicación' y 'consecuencia'.

2.1. Lógica y Matemáticas

Introduzco el tema del realismo lógico, porque es más fácil entender la naturaleza matemática de la lógica desde un punto de vista realista. Esto no quiere decir que la única manera de entender el carácter matemático de la lógica matemática es tomando una posición realista.[11] Lo que voy a decir aquí no compromete a una posición realista. La mejor manera de interpretar mis argumentos es pensándolos en términos de un realismo metodológico en vez de un realismo fuerte. Uso aquí la noción de realismo metodológico [working realism] en el sentido desarrollado por Stewart Shapiro en su Philosophy of Mathematics (1997).

> Working realism is a description of how mathematics is done, but there is little attempt to answer the questions that motivate philosophy of mathematics. Working realism, by itself, has few or no consequences for semantics, ontology, and how mathematics is applied in the sciences. The strongest version of working realism amount to claims that mathematics can (or should) be pursued as if its subject matter were a realm of independently existing, abstract, and eternal (or timeless) entities. But that is all.

10. Le agradezco a Raymundo Morado el señalarme este punto.

11. Mucho menos quiere decir que la objetividad que establece el realismo en lógica sea la diferencia que distinga entre lógica y matemáticas. En ningún momento quiero sugerir que la matemática no es objetiva, mientras que la lógica sí. Cuando, mas adelanto, digo que el mérito de los sistemas formales de la lógica queda determinado por su éxito en la explicación y descripción fidedigna de sus objetos, no quiero implicar que algo similar no pueda decirse en el caso de las matemáticas. Por supuesto que es posible sostener que el mérito de un sistema aritmético, por ejemplo, queda determinado por su éxito en la aplicación y descripción fidedigna de los números naturales. El realismo en lógica no es en incompatible con el realismo (ni el anti-realismo) en matemáticas. Como explico en la siguiente sección, la diferencia se establece en términos de la relación entre estos objetos y las teorías (lenguajes y lógicas) que desarrollamos para estudiarlos. Tomar una posición realista en lógica nos permite hacer mas clara esta diferencia.

> Working realism is consistent with antirealism. . . Anyone who is not out to revise current mathematics is probably a working realist at some level. (Shapiro 1997, pp. 37-38)

Por supuesto, Shapiro está hablando en términos de matemáticas. Sin embargo, lo mismo puede sostenerse en el caso de la lógica. El realismo lógico metodológico es una tesis descriptiva del trabajo lógico filosófico. Sostiene que los lógicos trabajamos como si los objetos y las conexiones lógicas que estudiamos entre ellos existieran de manera objetiva. En este sentido, así como el realismo matemático metodológico es la posición estándar entre los matemáticos de hoy en día, así también el realismo lógico metodológico es la posición estándar en la lógica contemporánea. Tal vez no lo sea en la ciencia o el sentido común, como lo afirma Resnik en (2000, p. 184), pero ello es irrelevante para los que aquí escribo. En tanto que el objetivo de este artículo es clarificar el papel que juegan las matemáticas en el quehacer lógico, o qué tan matemática es la lógica matemática tal y como la hacemos hoy en día, asumir un realismo lógico metodológico es suficiente.

Desde el punto de vista realista, entonces, la lógica aparece como una disciplina teórica filosófica, separada de las matemáticas. Su objetivo específico es el estudio de las propiedades (y relaciones) lógicas de entidades como conceptos, proposiciones, argumentos, teorías, modelos, etc. Dado que estas propiedades y relaciones lógicas son independientes de los sistemas lógicos que utilizamos para estudiarlas, debemos ver a la lógica filosófica como una ciencia teórica. Es por ello que el mérito de los sistemas formales de la lógica queda determinado por su éxito en la explicación y descripción fidedigna de sus hechos objetivos.

Entre las relaciones y propiedades lógicas que conforman el objeto de estudio de la lógica, la incompatibilidad, la verdad, la falsedad y la equivalencia lógicas son consideradas como las mas básicas o clásicas. Entre ellas, validez y consecuencia lógica –en un sentido amplio– son la propiedad y la relación fundamentales.[12] Estas propiedades y relaciones son básicas porque se predican de objetos lógicos básicos, como son los conceptos y las proposiciones. Además de estas propiedades y relaciones básicas, también existen una larga serie de propiedades y relaciones lógicas derivadas o meta-lógicas, como consistencia, decidibilidad, compacidad, incompletud, etc., que se predican de objetos lógicos mas complejos, como definiciones, teorías, modelos, lenguajes, etc. Llamo a estas propiedades y relaciones 'derivadas' porque su carácter lógico se deriva de su relación con las propiedades y relaciones lógicas básicas. La consistencia, por ejemplo, es importante para la lógica, porque sin ella no podríamos distinguir lógicamente entre proposiciones. En una teoría inconsistente, todas las proposiciones serían lógicamente equivalentes entre sí, y la relación de consecuencia lógica se volvería trivial. En muchos casos, sin embargo, es difícil ver la conexión entre propiedades lógicas básicas y derivadas. Para ello es necesario tener una visión mas amplia del complejo espectro de estudio de la lógica matemática.

Las propiedades lógicas derivadas se dividen en tres grandes tipos, dependiendo del área de la lógica matemática a la que pertenecen. Así, éstas pueden pertenecer a la teoría de modelos, la teoría de pruebas o la teoría de la recursión (Barwise 1997). La primera estudia las relaciones matemáticas fundamentales entre los enunciados de una teoría (comúnmente matemática) y las estructuras matemáticas que las hacen verdaderas. Así pues, su relación con las cuestiones básicas de la lógica formal es evidente. Baste recordar que una de las definiciones clásicas de consecuencia lógica hace que una proposición sea consecuencia

[12]. Esta definición de lógica, por supuesto, es una elaboración de la definición de Quine (1970): ". . . the business of logic" is to explore "connections" or "determining links" between "what sequences satisfy [different] simple sentences" and "what sequences satisfy [different] compound sentences". (p. 49) Connections of this kind are: (i) logical implication, (ii) logical incompatibility, (iii) logical truth, (iv) logical falsity and (v) logical equivalence. "We may conveniently subordinate this family of notions to one of their number, the notion of logical truth. Its advantage over implication is that it takes sentences singly rather than in pairs. The other notions can be got out

lógica de otra si todo modelo que hace a la primera verdadera, también hace verdadera a la segunda. Aun nociones tan esotéricas como compacidad o ultraproducto derivan su importancia lógica (es decir, justifican su lugar dentro de la lógica matemática) de su relevancia para este fin.

La razón principal por la cual las nociones centrales de la teoría de modelos parecen estar tan alejadas de las de la lógica formal, tal y como ésta se practica fuera de los departamentos de matemáticas, es por su predilección por el lenguaje y las herramientas del álgebra abstracta. Sin embargo, no debemos dejarnos confundir por esta circunstancia. Por lo menos desde Boole, el álgebra ha sido una herramienta esencial dentro de la lógica formal. No debemos olvidar que el sistema de lógica algebraica desarrollado por Boole en (1847) fue tanto el primer ejemplo de una lógica no numérica como el de una lógica formal, jugando así un papel esencial tanto en el desarrollo del álgebra abstracta como el de la lógica matemática. Si bien estas disciplinas se desarrollaron por largo tiempo de manera aislada, desde mediados de los treintas la relativa equivalencia entre el lenguaje asertivo, preferido por la mayoría de los lógicos en filosofía, y el lenguaje relacional del álgebra abstracta ha quedado firmemente establecida.[13] Mientras los lógicos no-algebraicos – también conocidos como 'logicistas' – prefieran hablar de sistemas deductivos, por ejemplo, los algebristas prefieren usar el termino algebraico 'filtro'. Mientras unos hablan de interpretaciones, los otros hablan de homomorfismos, etc.[14] Con estas equivalencias terminológicas bajo el brazo, el lenguaje

of logical truth. . ." (p. 50) Sin embargo, mientras que Quine considera la noción de verdad lógica como fundamental, yo pongo a la implicación lógica al centro de las relaciones y propiedades lógicas clásicas.

[13]. La distinción fue hecha en estos términos por Curry (1963).

[14]. Baste recordar que los conjuntos de fórmulas que constituyen una teoría deductiva (cerrada bajo adición y silogismo disyuntivo) forman un filtro dentro del álgebra de las fórmulas del mismo. De manera similar, la función de interpretación en lógica logicista corresponde a cierto tipo de homomorfismo entre álgebras (una correspondiendo al lenguaje y otra a la semántica del lenguaje). Siguiendo esta misma línea de razonamiento, propiedades derivadas simples como la consistencia y la completud también pueden sustituirse por su análogo algebraico dependiendo de si el álgebra del lenguaje se encuentra libre (en el caso de la completud) o en (en el

algebraico de la teoría de modelos contemporánea pierde mucho de su carácter esotérico para revelar su carácter eminentemente lógico.

De la misma manera, la teoría de pruebas no es otra cosa que el estudio matemático de la noción lógica de derivación, una de las herramientas esenciales, como hemos visto, del aparato formal de estudio de la validez lógica. La teoría de la recursión, a su vez, puede verse también como el estudio de un aspecto importante de las derivaciones y las definiciones: su computabilidad. Como veremos en la última sección de este artículo, la computabilidad juega un papel esencial dentro de la lógica formal, y el estudio efectivo de la validez y otras propiedades lógicas básicas.

2.2. ¿Qué es la Lógica Matemática?

Podemos, entonces, empezar por distinguir tres sentidos básicos de la frase 'lógica matemática':

1. 'Logica Matemática' como lógica matematizada, es decir, como lógica que utiliza métodos y herramientas matemáticas .
2. 'Lógica Matemática' como la parte matemática de la lógica (matematizada).
3. 'Lógica Matemática' como lógica de las matemáticas, es decir, la rama de la lógica que se encarga del estudio de la lógica que se usa dentro del razonamiento y la argumentación matemáticas. Por extensión, a veces también se usa esta frase para referirse a la tradición lógica que coloca a este tipo de argumentos y razonamientos al centro del estudio lógico, ya sea como paradigmas o tipos clásicos.

---

caso de la consistencia) cierta sub-clase adecuada de álgebras. Por supuesto, lo dicho en esta sección apenas toca de manera muy superficial la fuerte relación entre los lenguajes algebraicos y logicista de la lógica. Un excelente estudio de esta relación, que cubre desde cuestiones tan básicas como las aquí mencionadas hasta los más sofisticados resultados recientes, se encuentra en Dunn y Hardegree (2001).

En la mayor parte de este trabajo me ocuparé de la lógica matemática en el primer sentido, es decir, como lógica matematizada, ya que es en ella en que se sitúa la gran confusión que quiero elucidar en este texto. La fuente principal de esta confusión entre lógica y matemáticas es el método matemático que se utiliza en la lógica formal. Para evitar la confusión, bastaría ser cuidadoso a la hora de distinguir entre ciencia (lógica) y método (matemático). La lógica es una ciencia filosófica y parte de su método es matemático. De esta manera, la lógica matemática es matemática en el mismo sentido que lo es, digamos, la mecánica newtoniana. En ambos casos, el método es matemático, pero ellas mismas no son matemáticas. Por principio de cuenta, las teorías de ambas ciencias cargan un peso verificativo. Sus resultados no dependen de manera exclusiva de los principios postulados por ellas mismas, sino en su capacidad de explicar, de manera científica, fenómenos que le son externos e independientes.

Otra distinción importante que debe hacerse respecto al método matemático – de la ciencia en general, y de la lógica en particular – es entre los sistemas lógicos formales, también llamados teorías formales, y las teorías lógicas (filosóficas) propiamente dichas. Un sistema lógico formal es una entidad matemática compleja. Tradicionalmente, consiste de un alfabeto, un conjunto de fórmulas bien formadas, un conjunto de reglas de inferencia y, en algunos casos, un conjunto de axiomas. En tanto objeto matemático, todo sistema lógico formal tiene propiedades matemáticas. Algunas de ellas (las así–llamadas propiedades sintácticas) son internas, mientras que otras (las así–llamadas propiedades semánticas) son externas, es decir, se predican tan sólo en relación a otro sistema matemático (a veces meramente posible) comúnmente llamado su modelo.[15] Algunas de las propiedades

[15]. A este último tipo de sistemas matemáticos también puede llamársele 'sistemas formales', pues su papel en la lógica matemática es completamente análogo al de los sistemas lógicos formales tradicionalmente concebidos.

matemáticas de los sistemas formales pueden expresarse como propiedades, relativas-al-sistema, de alguno de sus elementos. Por ejemplo, cuando uno dice que $\forall x\ (Px \supset (Qx \supset Px))$ es un axioma del sistema L de la lógica de primer orden, esto puede entenderse tanto como una propiedad del sistema formal L – que tiene a esa fórmula como una de sus premisas –, como una propiedad de la mentada fórmula – que es una axioma – relativa a L. Es en este sentido que uno puede decir que los sistemas lógicos formales "afirman, o preferentemente prueban, resultados a cerca de sus expresiones simbólicas (en jerga moderna, las 'fórmulas' de su 'lenguaje')." (Kirwan, 1995) Llamemos locales a este tipo de propiedades, y globales a aquellas que no pueden expresarse mas que como propiedades del sistema lógico formal en su conjunto. Ser un teorema o un axioma son ejemplos paradigmáticos de propiedades locales, mientras que la compacidad, decidibilidad, etc. son ejemplo típicos de propiedades globales de los sistemas lógicos formales.

Es muy importante no confundir estas propiedades matemáticas de los sistemas formales con propiedades lógicas propiamente dichas. Las relaciones de las que empezamos hablando como objeto de estudio de la lógica – la consecuencia lógica, la verdad lógica, etc. – no son meramente propiedades matemáticas definidas dentro de un sistema formal, sino relaciones y propiedades lógicas reales que se dan de hecho entre entidades lógicas (conceptos, proposiciones, teorías, etcétera). Estos sistemas formales son matemáticos, por supuesto, pero no son lógicos sino hasta ser aplicados al estudio de relaciones y propiedades lógicas reales. En tal aplicación lógica, las propiedades matemáticas locales de los sistemas formales sirven de modelo de las propiedades lógicas básicas, mientras que las propiedades meta-lógicas son modeladas por las propiedades globales.

Sin embargo, en la lógica contemporánea, el término 'sistema formal' suele aplicarse sólo a sistemas del primer tipo. En consecuencia, en este artículo tomo a los sistemas lógico formales en su acepción tradicional, esto es, En este respecto, el objetivo de los sistemas lógicos formales es construir una correspondencia entre propiedades lógicas y matemáticas. Esta correspondencia se establece a través del establecimiento de un mecanismo, a veces muy complejo, de representación de las entidades lógicas cuyas propiedades serán modeladas por algún tipo de entidades matemáticas constituyentes del sistema formal. Tradicionalmente, esto implica representar proposiciones por fórmulas, argumentos por secuencias de fórmulas, y teorías por conjunto de fórmulas. Este mecanismo es comúnmente llamado 'formalización' o 'simbolización', y se dice que las entidades matemáticas 'formalizan' o 'simbolizan' las entidades lógicas que representan.

También es necesario establecer una correspondencia análoga al nivel de propiedades. Es necesario representar las propiedades lógicas bajo propiedades matemáticas. Comúnmente esto se logra estableciendo una correspondencia uno-a-uno entre la propiedad matemática de ser un teorema y la propiedad lógica de ser lógicamente verdadera, entre la propiedad matemática de deducibilidad y la propiedad lógica de validez, etc. Para hablar de esta correspondencia también se usan los términos, 'formalización' y 'simbolización.' Lo que estas dos correspondencias establecen es una aplicación lógica del sistema formal. Solo una vez que estas correspondencias han sido establecidas es que podemos hablar de una verdadera teoría lógica (matematizada). Una teoría lógica matematizada, en este sentido, involucra tanto al sistema formal como a su aplicación lógica.[16] En consecuencia, una teoría de lógica Matemática no es más que un sistema formal, aplicado al estudio de la lógica.

Idealmente, la correspondencia entre lógica y sistema formal debe ser tal que si a y P simbolizan, respectivamente, una entidad lógica y una propiedad lógica, entonces a tiene la

contemplando sólo su así-llamada sintaxis.

[16]. Nótese que esta última es esencial.

propiedad P en caso y sólo en caso, de que la entidad lógica simbolizada por a tenga la propiedad lógica simbolizada por P. Por ejemplo, en la aplicación tradicional de sistemas lógicos formales correctos,[17] una fórmula es teorema del sistema si y sólo si la proposición que ella simboliza es una verdad lógica en ese mismo lenguaje. Lo que no queremos es que existan relaciones matemáticas donde no haya relaciones lógicas del tipo correspondiente, o que alguna propiedad lógica (simbolizable) escape de nuestro modelo matemático.[18]

La presente distinción entre el sistema formal meramente matemático, sus propiedades meta-lógicas y su aplicación lógica es análoga a la distinción que Raymundo Morado hace en "La Rivalidad en lógica" (1984) entre 'sistema lógico', 'metalógica' y 'filosofía de la lógica.'[19] Para Morado,

> Entenderé por la expresión "una lógica X" algún conjunto en particular que comprehenda un sistema lógico (entiendo que éste incluye tanto una sintaxis como una semántica), una metalógica en la que se ubican los metateoremas sobre el sistema, y una filosofía de la lógica que trate de esclarecer la trama de relaciones entre el sistema lógico, el pensamiento y la realidad. (Morado 1984, p. 238)[20]

Distinguir la realidad lógica que es objeto de nuestro estudio de la teoría lógica con la que la estudiamos y la herramienta matemática que usamos para construirla es más importante (pero, al mismo tiempo, mas difícil) en el caso de las propiedades meta-lógicas. Cuando probamos la consistencia de una teoría dada T_1 construyendo un modelo apropiado dentro de una teoría matemática T_2, por ejemplo, trabajamos, en realidad, con cinco teorías distintas: la teoría objeto T_1, una teoría meta-lógica T_3, y tres teorías matemáticas. Estas tres teorías

---

17. Consistentes y completos.

18. Es importante que estos deseos no se confundan con las así-llamadas propiedades meta-lógicas de corrección y completud. Estas últimas son pro-piedades matemáticas de los sistemas lógicos formales, mientras que los primeros son virtudes de los sistemas formales como partes de nuestras teorías lógicas.

19. Morado encuentra antecedentes de esta distinción en el trabajo de Lungarzo (1984). Mi distinción, en cambio, encuentra inspiración en el trabajo de Kirwan (1995) sobre los diferentes tipos de verdades lógicas.

20. Pese a lo que podría sugerir esta cita aislada, Morado no cree que toda 'lógica' sea de este tipo, es decir, que toda lógica sea matematizada en mi sentido. La afirmación de Morado debe entenderse en el contexto de su

matemáticas proveen el aparato matemático para realizar la prueba formal. En primer lugar, se trabaja dentro del marco general de una teoría meta-lógica T_3 (la teoría de modelos tipo Tarski), según la cual la existencia de un modelo para una teoría dada demuestra su consistencia. Esta teoría meta-lógica T_3, a su vez, usa las herramientas de otra teoría matemática T_4 (la teoría de conjuntos) para formalizar la relación lógica ser un modelo de. Para poder aplicar este aparato matemático a T_1, T_3 usa un modelo matemático T_5 de T_1 (donde T_5 es la formalización de T_1). Luego, establece una relación matemática (en T_4) entre las teorías matemáticas T_2 y T_5, la cual formaliza la relación lógica ser un modelo de entre T_2 y T_1. De esta manera se demuestra formalmente la consistencia lógica de T_1.[21]

Estamos ahora en posición de detallar un poco más la distinción que hicimos antes entre los tres sentidos de la frase 'lógica matemática'. La lógica matemática, en el segundo sentido, es decir, como lógica de las matemáticas, es el estudio de las relaciones y propiedades lógicas de teorías, pruebas, modelos, proposiciones y conceptos matemáticos.[22] La lógica matemática en el tercer sentido es, en realidad, una rama de la matemática, no de la lógica. La lógica matemática en este último sentido se dedica al estudio de los sistemas formales de la lógica como meros sistemas matemáticos, no lógicos. Estudia las propiedades formales del

---

discusión de la rivalidad en lógica. Las lógicas cuya rivalidad Morado estudia en este artículo son, de hecho, matematizadas. Sin embargo, de ello no se sigue que toda lógica sea matematizada.

21. La situación no cambia aún en los casos en que la teoría objeto también es matemática, o cuando los modelos matemáticos son sub-teorías (no necesariamente propias) de la teoría objeto. Es importante recordar que, en el caso de muchas teorías matemáticas, es posible formalizar algunas de sus propiedades lógicas reales dentro de las teorías mismas. La gödelización, por ejemplo, es un recurso que nos permite formalizar la relación lógica 'x es una prueba correcta de y en la aritmética de Peano' dentro de la misma aritmética de Peano. Sn embargo, esta formalización no confunde la relación lógica con su modelo matemático (ni la reduce a ella). Esta última es una relación aritmética entre números, mientras que la primera sigue siendo una relación entre secuencias de proposiciones y proposiciones. Lo que la gödelización meramente demuestra es que ciertas proposiciones lógicas (sobre la probabilidad dentro de la aritmética de Peano) pueden ser modelados por proposiciones matemáticas de la misma teoría aritmética. Sin embargo, tales proposiciones aritméticas siguen siendo meros modelos de las proposiciones lógicas. Siguen siendo sobre números, no sobre teoremas o pruebas.

22. Tradicionalmente, se identifica esta lógica con la lógica deductiva de primer orden. Sin embargo, hay también quienes sostienen que la matemática opera principalmente sobre una lógica de segundo orden, y otros que

tipo de sistemas matemáticos que se utilizan, o en principio podrían utilizarse, en lógica. En este sentido, esta lógica matemática sólo se interesa en las primeras dos partes de la clasificación de Morado. La lógica matemática en el primer sentido, en contraste, contempla las tres en conjunto.

2.3. ¿Qué son las Matemáticas?

Para concluir que la lógica no es matemática no basta con señalar que tiene como objetivo el estudio de relaciones como consecuencia lógica, derivabilidad, consistencia, etc. También hace falta argumentar que estas relaciones no son matemáticas.[23] Ya he dicho que lo que distingue a las propiedades lógicas objetivas de las matemáticas es que las primeras son independientes, no sólo de nuestra arquitectura cognitiva, o nuestras convenciones y usos lingüísticos, sino también del aparato formal con el que las estudiamos. En matemáticas, en contraste, los fenómenos se constituyen por completo por este aparato formal. Los objetos matemáticos y sus propiedades pueden determinarse por completo haciendo uso exclusivo de los mecanismos lógicos y lingüísticos de su teoría. En la matemática, tanto la indiscernibilidad de los idénticos como la identidad de los indiscernibles son principios aceptados como válidos. Este es un punto que ha sido elaborado en detalle por Stewart Shapiro en (1997), pero que comparten otros filósofos de la matemática contemporáneos.[24] Ahí, Shapiro desarrolla la tesis

---

sostienen que no todo razonamiento matemático es de tipo deductivo, sino que también se realizan abducciones e inducciones.

[23]. Agradezco a dos árbitros anónimos su insistencia en desarrollar este punto de manera mas clara y explícita. Los dos enunciados anteriores provienen verbatim de los comentarios de uno de ellos.

[24]. Penelope Maddy, por ejemplo, alude a él en su discusión del axioma de extensionalidad de la teoría de conjuntos en (1997, 37-40) Para Maddy, la adopción de estos principios (el de indiscernibilidad de los idénticos y de identidad de los indiscernibles) en matemática obedece tanto a consideraciones intrínsecas a las matemáticas como a consideraciones prácticas extrínsecas. Desde un punto de vista intrínseco, los axiomas de identidad que obedecen estos principios son considerados analíticos (Maddy 1997, 38), mientras que desde un punto de vista extrínsico, las teorías que se siguen de ellos son mas simples (Maddy 1997, 40). Ni Maddy ni Shapiro proponen justificar estos princpios de manera a-priori. Lo que presentan es meramente un diagnóstico de la práctica matemática contemporánea.

que él llama de relatividad lógica-lenguaje-ontología, según la cual para toda teoría matemática T en un lenguaje L y bajo una lógica Λ,[25] x=y si y sólo si para toda expresión p bien-formada en L, p[x/y] – la expresión resultante de sustituir x en p por y – es Λ-equivalente a p. En otras palabras, la identidad de los objetos matemáticos está completamente determinada por las propiedades que las que se le pueden predicar en el lenguaje de la teoría y por su rol inferencial según la lógica del mismo.

Bajo esta caracterización, es claro que las propiedades lógicas no son matemáticas. Para ellas no se cumple el principio de relatividad de Shapiro. Si la lógica fuera matemática, dos objetos lógicos serían lógicamente equivalentes – tendrían las mismas propiedades lógicas – si y sólo si se simbolizaran de la misma manera en cualquier sístema formal.[26] Sin embargo, es conceptualmente posible que dos objetos lógicos x y y tengan diferentes propiedades lógicas y, sin embargo, su diferencia no sea capturada por ningún sistema formal. Len otras palabras, las propiedades lógicas no están completamente determinadas por la herramienta formal con la que las estudiamos.

Alguien podría responder que aún cuando una diferencia lógica no haya sido capturada por ningún sistema formal actual, de ello no se sigue que ésta no sea formalizable, por lo menos en principio. Desde este punto de vista, aún en el caso de que se encontrase un aparente contraejemplo como el del párrafo anterior, seguiría siendo factible el crear un nuevo sistema formal que sí incluyese la distinción problematica. Sin embargo, tal respuesta, lejos de refutar

---

[25]. Nótese que para Shapiro, y para mí también, lenguaje y lógica pertenecen a la teoría, no son elementos externos a ella. Teorías matemáticas en diferentes lenguaje y/o con diferentes lógicas son, de hecho, diferentes teorías.

[26]. Esto se debe a que las fórmulas de un sístema formal sí expresan objetos matemáticos dentro del sístema formal. A éstos objetos se les conoce comúnmente como formas lógicas. Para ellas sí se cumple el principio de relatividad de Shapiro. Dada un teoría lógica T, en un lenguaje formal L y bajo una (meta)lógica Λ, la forma lógica expresada por x es equivalente a la de y si y sólo si para toda expresión p bien-formada en L, p[x/y] –la expresión resultante de sustituir x en p por y – es Λ-equivalente a p. De esta manera, la tesis de que la lógica no

nuestra tesis del carácter no-matemático de las propiedades lógicas, la reforzaría. El hecho de que podamos reconocer una propiedad lógica antes de formalizarla atestigüa al carácter objetivo de tal propiedad.[27]

De esta manera, podemos ver de manera más clara en que sentido la lógica matemática es matemática y en que sentido no es meramente matemática. Queda aún por aclarar en que sentido se dice también que esta lógica matemática es formal y simbólica. Ése es el objetivo de la tercera y última sección del artículo.

3.1. Una Aproximación Histórica al Carácter Formal y Simbólico de la Lógica Matemática

Si nos preguntáramos en qué sentido es simbólica la lógica matemática, la respuesta obvia pareciera ser que la lógica matemática es simbólica precisamente porque usa símbolos. Sin embargo, dentro de las disciplinas matemáticas, no cualquier uso de símbolos califica para ser propiamente simbólico. En el estudio de la historia de la matemática se suele distinguir entre un uso sincopado de símbolos y un uso propiamente simbólico, a veces también llamado formal o analítico. [28] En The Nature and Growth of Modern Mathematics, por ejemplo, Edna E. Kramer (1982) introduce esta distinción de la siguiente manera:

---

es matemática se reduce a la tesis de que la identidad entre las propiedades lógicas de un objeto y su forma lógica no es 'analítica' en el sentido de Maddy (1997, 38).

27. Si bien es cierto que cualquier propiedad lógica es en principio formalizable, es imposible formalizar todas las propiedades lógicas de todos los objetos lógicos.

28. La razón por la cual se usa aquí el término 'formal' resultará obvio mas adelante, Sin embargo, en el caso del termino 'analítico' vale la pena hacer una aclaración histórica. El presente uso del término 'análisis' tiene su origen en el sentido clásico atribuido a Pappus por los primeros algebristas occidentales. Recordemos que en la matemática del SXV, las nociones de 'álgebra' y 'análisis' aún no adquirían sus connotaciones actuales, sino que se confundían en una sola noción que combinaba elementos propiamente matemáticos (ciertos cálculos y resultados propios de lo que hoy llamaríamos 'álgebra') con otros mas bien metodológicos (técnicas de resolución de cálculos provenientes de la tradición geométrica clásica). Es por ello que, por ejemplo, hablamos de la geometría cartesiana como 'analítica' en vez de 'algebraica'. Sin embargo, conforme álgebra y análisis se separaron como disciplinas matemáticas y ambos términos adquirieron su significado actual, el viejo vocabulario no se modificó del todo y en algunos casos, como el presente, se ha seguido usando el término 'analítico' en su sentido primitivo.

De la misma manera, no debemos confundir este sentido de 'analítico' con el introducido por Kant en su distinción entre juicios analíticos y sintético. La noción de análisis presente en Kant no es de origen matemático,

> Modern literal algebraic symbolism . . ., launched to some extent by Diophantus, was not in vogue before the sixteenth century, when François Viète (1540-1603) better known by his Latin pen name Vieta, was the first to use letters to represent unknowns. Before the day of Diophantus algebra was rhetorical, that is, results were obtained by means of verbal argument, without abbreviations or symbols of any kind. . . Syncopated algebra, as it is called, is more a case of shorthand than completely abstract symbolism, but it is a marked step in the right direction. At any rate, Diophantus was the first mathematician in history to provide any sort of substitute for lengthy verbal expression. (Kramer, 1982, p. 65)

Esta distinción se introduce en la historia de las matemáticas para diferenciar el uso de símbolos dentro de las álgebras antigua y moderna. En el álgebra antigua, es decir el álgebra clásica posterior a Diofanto, el álgebra árabe y la cosística occidental, no existía el concepto de variable tal y como lo entendemos hoy en día. Además de las constantes del propio cálculo, se usaban letras, pero éstas no eran más que abreviaciones de expresiones más complejas y/o

---

sino platónico-aristotélico. En la tradición medieval, la noción de 'análisis' estaba íntimamente ligada a la distinción entre género y especie, y se introduce a la tradición moderna con el sentido de 'separación en partes' (recordemos que una de las definiciones de juicio analítico que Kant da en los Prolegomenos (1984) es aquel cuyo predicado está contenido en el sujeto). Es interesante notar que ambas nociones de análisis juegan un papel importante en los orígenes de la lógica formal moderna. Cuando Boole intitula su texto de 1847 "The Mathematical Analysis of Logic", él esta utilizando la palabra 'Analysis' precisamente en el primer sentido. No es de sorprender, por lo tanto, que su sistema formal sea de tipo algebraíco. Unos años mas tarde, cuando Peirce desarrolla su teoría lógica matematizada, considera necesario añadir al álgebra de Boole un nuevo símbolo '$\subset$' para representar que un concepto esté contenido en otro. Peirce encontró un fuerte paralelismo entre esta relación lógica entre conceptos (clave para la analiticidad kantiana) y la implicación material entre proposiciones (base para el concepto lógico de analiticidad), por lo que les dio a ambas relaciones el mismo símbolo. Cf. (Nidditch 1962, pp. 49, 50) Un desarrollo mas detallado de la historia del concepto no-algebraíco de 'análisis' en la filosofía moderna, cf. (Bealey 2002).

Este último uso del término analítico nos es tan común y natural hoy en día que no es raro encontrar confusiones a la hora de interpretar escritos procedentes de este importante período histórico. Por ejemplo, al revisar la historia de la geometría analítica, J. J. Gray (1994) sostiene que ésta recibe su nombre por el método analítico introducido por Descartes a la geometría durante el SXVII. Pero, luego añade: "Before turning to modern developments, the name 'analytic geometry' should also be explained. To analyse something in the mathematical terminology of the Greeks and the seventeenth century was to take something apart, much as one speaks of a chemical analysis today. In the Cartesian approach, figures are analysed in this sense: points are given coordinates, curves are successively given equations; above all, the unknown point of points are given coordinates and these are treated on a par with the known quantities until they can be found from certain equations that this process of analysis yields." (pp. 852-853) Si bien es posible sostener que el método de coordenadas que Descartes usa en su geometría es analítico en este sentido, creo que he dejado claro que no era en este sentido en que Descartes mismo usaba el término. Otro ejemplo interesante de esta confusión es el intento de Helena M. Pycior (1994, pp. 1637-1638) por interpretar los pasajes de la obra de Edgar Allan Poe donde el personaje Auguste Dupin habla de la similitud entre sus métodos detectivescos y el análisis matemático. Una vez que entendemos que el análisis del que habla Poe es de naturaleza algebraica, nos deja de sorprender –como sorprende a Pycior– que Dupin no use el método de separación por partes, sino que haga referencia a cálculos abstractos y fórmulas.

recursos mnemotécnicos. Por lo tanto, no se tenían mecanismos para expresar cálculos en general. Dado que el formalismo algebraico contenía sólo símbolos constantes, no se podía expresar en él más que cálculos particulares. La generalidad se expresaba a través de casos particulares que servían como ejemplos o paradigmas. A este uso de los símbolos se le llama sincopado, pues no forma un lenguaje simbólico propiamente dicho. No fue sino hasta el trabajo de Viète y, paralelamente, Descartes, que aparecieron en matemáticas las variables propiamente dichas y, con ellas, el álgebra moderna. La introducción de variables en el lenguaje algebraico permitió dos avances importantes dentro de la historia de la matemática: la posibilidad de expresar formas generales[29] y, aun más importante, la posibilidad de calcular con ellas.

La diferencia central entre el álgebra moderna y la antigua es que, a través del uso de variables, por fin se pudo abstraer la forma de diferentes cálculos particulares y expresarla en una fórmula general. A diferencia de las fórmulas con letras del álgebra antigua, que expresaban cálculos particulares de manera abreviada, las fórmulas con variables del álgebra moderna permitían por primera vez expresar formas generales de cálculo. Este nuevo lenguaje simbólico permitió a los matemáticos manipular las formas generales de una manera que era casi imposible dentro del lenguaje anterior. Además, les permitió integrar las nuevas fórmulas en un nuevo cálculo de formas generales. Es sólo hasta entonces que debe hablarse de un lenguaje simbólico propiamente dicho. En este sentido, un lenguaje simbólico no es simplemente aquel que usa símbolos, sino uno que usa símbolos para calcular. Así entonces, si

---

Más sobre el método analítico clásico y su influencia sobre el pensamiento moderno temprano puede encontrarse en (Hintikka y Remes, 1974).

[29]. En la matemática moderna, cuando se habla de ‘generalidad’, ésta no debe entenderse en el mismo sentido inductivo que tiene esta expresión fuera de las matemáticas. En su lugar, una expresión matemática ‘general’ debe entenderse como una expresión formal (en el sentido inaugurado por el álgebra moderna), es decir, como un esquema de expresiones o cálculos de la misma forma. Así pues, podemos decir que en matemáticas no se generaliza, sino que se formaliza.

bien es cierto que la introducción de las variables trajo consigo la posibilidad de expresar cierta generalidad o forma en matemáticas, el mayor logro conseguido con ellas fue la posibilidad de crear un nuevo tipo de cálculos formales. En otras palabras, lo que inaugura el álgebra moderna – y por lo que ésta representa una revolución significativa en el desarrollo de las matemáticas – es la posibilidad de calcular con formas.[30]

Desafortunadamente, la importancia de esta nueva herramienta no fue reconocida de manera inmediata por los matemáticos europeos de su tiempo. Por el contrario, por los siguientes doscientos años, se vivió en la matemática occidental una intensa lucha entre estas dos maneras de entender la matemática: bajo el paradigma formal del álgebra, o bajo el paradigma constructivo de la geometría. La extensión de este conflicto es tan obvio y tajante que es imposible entender la historia de las matemáticas – y, por extensión, del conocimiento científico en general – de estos siglos sin darle un lugar central a esta pugna. Por lo mismo, es fácil seguir el desarrollo de los ideales formales en matemáticas de Francia a Inglaterra, y ahí, en el siglo XIX, bajo la guía de la Analytic Society, a la lógica, a través del trabajo de DeMorgan y Boole.[31]

Es tentador pensar que el carácter formal que introdujeron estos primeros lógicos formales está relacionado con la vieja oposición filosófica entre forma y materia. Sin embargo, esto no es así. Por el contrario, es claro que, al realizar su formalización de la lógica, algebristas como De Morgan no creían estar aislando una cierta forma lógica, ausente de toda materia, sino estableciendo patrones de invariancia entre fórmulas lógicas. Esto resulta aún

[30]. Vale la pena mencionar que la palabra 'forma' no fue utilizada con este sentido y en asociación al método analítico al que aquí aludo de manera regular hasta el influyente trabajo de George Peacock. En 1830, Peacocke propuso como carácter definitorio del álgebra simbólica su principio de permanencia de las formas equivalentes: "Whatever form is algebraically equivalent to another, when expressed in general symbos, must be true, whatever these symbols denote." (Peacocke 1830, p. 104) A Peacocke le debemos, pues, la convergencia entre lo 'analítico', lo 'algebraico', lo 'simbólico' y lo 'formal'.

[31]. Cf. (Grattan-Guiness 2000, pp. 14-74)

más claro si se analiza la polémica entre De Morgan y Mansel a mediados del siglo XIX.[32] En su comentario a <u>Formal Logic</u> (De Morgan, 1847), Mansel (1851) acusó a De Morgan de no manejar bien la distinción entre forma y materia. Sin embargo, es claro que ambos pensadores utilizaban la noción de forma de manera diferente. En una primera reacción a la crítica de Mansel, De Morgan trató de conciliar ambas nociones, pero pronto se dio cuenta de la radical diferencia entre ellas. Para 1847, De Morgan ya consideraba la noción de forma opuesta a materia como una noción "metafísica" (1847, p. 27) irrelevante para su empresa de análisis lógico.[33]

Es importante, pues, distinguir entre la noción de forma opuesta a la materia a la noción de forma algebraica usada en la lógica matemática. El lenguaje formal de la lógica moderna se desarrolla dentro de la tradición algebraica.[34] En este sentido, el lenguaje simbólico de la lógica matemática nacida a finales del siglo XIX y principios del XX, no es meramente sincopado, sino formal. No sólo usa fórmulas con variables para expresar la forma lógica de enunciados, sino que además cuenta con un cálculo que permite su manipulación.[35] Ambas propiedades son esenciales para la naturaleza matemática de la lógica. La formalización y el cálculo son los dos pilares sobre los cuales está construida la lógica matemática. La lógica simbólica contemporánea es matemática precisamente porque cuenta con ambas dimensiones.

---

[32]. Cf. (Grattan-Guiness 2000, pp. 28-29)

[33]. Desafortunadamente, mas de medio siglo después de la discusión entre Mansel y De Morgan la distinción entre lo 'formal' y lo 'material' regreso al vocabulario lógico con la distinción entre <u>implicación material</u> e <u>implicación formal</u> introducida por Russell. Grattan-Guiness (2000, p. 318) conjetura que Russell debió de haber sido influenciado por el esfuerzo de De Morgan por conciliar las dos nociones de 'forma'.

[34] No es una casualidad que los primeros sistemas de lógica matemática, como los de Boole y De Morgan, fueran algebraicos. Sobre los orígenes algebraicos de la lógica moderna, véase Kramer (1982).

[35]. Esta doble dimensión de la lógica –como cálculo y como lenguaje– es por lo menos tan vieja como la <u>characteristica universalis</u> de Leibniz (1666), la cual, además de un lenguaje universal, era también un <u>calculo ratiocinator</u>. Ahí, Leibniz describe a ésta como "una técnica general por medio de la cual todo razonamiento pueda reducirse a mero cálculo. . . Este método debe servir, al mismo tiempo, como un tipo de lenguaje universal, cuyos símbolos y vocabulario propios puedan dirigir al razonamiento de tal manera que errores, excepto aquellos de hecho, sean como errores de computación, meramente el resultado de no aplicar las reglas de manera correcta."

Si el lenguaje simbólico de la lógica no estuviera inscrito en un cálculo formal, no sería propiamente simbólico. Se quedaría al mero nivel sincopado. Igualmente, si sus fórmulas no expresaran formas generales, no podríamos hablar de un lenguaje o una lógica formal.

Finalmente, el carácter formal de la lógica simbólica es esencial también para su aplicación. Una de las características mas importantes que debe satisfacer todo sistema lógico formal es que sea aplicable. Comúnmente, esta aplicabilidad se sustancializa en términos de su capacidad para simbolizar o formalizar[36] enunciados y argumentos del lenguaje natural. En los casos mas simples, aplicar un sistema lógico formal requiere de un mecanismo que permita 'traducir' entre expresiones del lenguaje artificial y expresiones del lenguaje natural. Para demostrar su aplicabilidad, basta darle al formalismo una 'traducción' al lenguaje natural que preserve las propiedades lógicas de éste. Sin embargo, este requisito de aplicación al lenguaje natural es demasiado estricto en muchos casos. Adoptarlo restringiría la aplicación de la lógica a los límites del lenguaje natural. Someter a todo sistema lógico formal a un requisito tan fuerte como éste implicaría dejar fuera del campo de la lógica a desarrollos tan importantes como la lógica infinitaria o las lógicas de cierta complejidad, cuya expresividad es más fuerte que la del lenguaje natural.[37]

Recordemos que los sistemas lógicos formales son <u>modelos científicos</u>. Como tales, su aplicación muchas veces no es directa y sencilla, sino que requiere de idealizaciones que la alejan del mundo real. Un ejemplo clásico de este punto es la teoría de los gases ideales en física. Así como la inexistencia estricta de gases ideales en el mundo físico real no invalida los resultados de esa rama de la termodinámica, así también la posible inexistencia de argumentos o expresiones infinitas en el lenguaje natural no invalida a la lógica infinitaria. Aunque

[36]. El hecho de que hablemos indistintamente de <u>formalización</u> y <u>simbolización</u> en este caso señala, una vez más, a la generalizada confusión que existe entre la naturaleza formal y simbólica de la lógica matemática.

muchos sistemas formales de lógica matemática no son aplicables de manera directa al lenguaje natural, no por ello dejan de servir su propósito de modelos científicos del universo lógico. La aplicabilidad de un sistema o teoría lógica debe entenderse en el mismo sentido amplio en que toda teoría o modelo científico es aplicable a la realidad. De otra manera excluiríamos desarrollos importantes dentro de la lógica matemática.

3.2. Lo Matemático y lo Formal

A través de su asociación con la así llamada escuela formalista en filosofía de las matemáticas, el término 'formal' ha jugado otro papel importante dentro del desarrollo de la lógica matemática. Sin embargo, el sentido de 'formal' relacionado con el proyecto filosófico de Hilbert y lo que Jaroslav Peregrin (1988) ha llamado el giro 'formalista' en Lógica es completamente distinto del sentido de 'formal' del que hemos hablado hasta ahora. Stewart Shapiro (2000, 143) encuentra el origen de este segundo uso del término 'formal' en el trabajo de Thomae (1898, pp. 1-11), para quien hablar de los números como signos tangibles no interpretados era tomar un "punto de vista formal." [38] Sin embargo, es claro que Hilbert nunca habría aceptado una tesis como ésta y que, por lo tanto, su proyecto filosófico no es un formalismo en el sentido de Thomae. La asociación actual que existe entre el término 'formalismo' y el pensamiento de Hilbert se debe a L. E. J. Brouwer, quien, en sus críticas al proyecto fundacionista de Hilbert, lo llamó de este modo, probablemente con el objetivo de asociarlo con el ingenuo y desacreditado proyecto de Thomae. La virulenta disputa entre Brouwer y Hilbert alcanzó tal celebridad, aún fuera de los círculos filosóficos y matemáticos de su tiempo, que la asociación entre el término 'formalismo' y el proyecto Hilbertiano quedó

[37]. Agradezco a un arbitro anónimo el haberme señalado este punto.
[38]. A Thomae también le debemos la recalcitrante idea de que las matemáticas son como un juego de ajedrez. Cf. Grattan-Guiness (2000, pp. 196-198)

indeleblemente marcada. Pese a que, por lo menos desde su plática en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1904 (1905), Hilbert presentó su posición en explícita divergencia de la de Thomae, y que él mismo nunca uso el término, la palabra ‘formalismo’ ha quedado permanentemente ligada al pensamiento de este célebre filósofo y matemático.[39] En consecuencia, hoy en día, se define el carácter formal de un sistema o teoría matemática en términos de su adecuación a los cánones axiomáticos propuestos por Hilbert.[40] Esta definición del carácter formal de una teoría aparece formulada de manera tan cándida como la siguiente, del libro de texto Introduction to Mathematical Logic, usado para enseñar lógica matemática en la Universidad de Latvia:[41]

> The exact definition of the “formal” can be given in terms of theory of algorithms (or recursive functions): a theory T is called a formal theory, iff an algorithm (i.e. a mechanically applicable computation procedure) is presented for checking correctness of reasoning via principles of T. It means that when somebody is going to publish a “mathematical text” calling it “a proof of a theorem in T”, we must be able to check mechanically whether the text in question really is a proof according to the standards of reasoning accepted in T. Thus, in formal theories, the standards of reasoning must be defined precisely enough to enable checking of proofs by means of a computer program. (Note that we discuss here checking of ready proofs, not the problem of provability!) (Detlovs y Podnieks 2000-2002, §1.1),

Pese a que, en muchos casos, las teorías lógicas formales son ‘formales’ también en este otro sentido, es importante tener claro que la lógica no tiene que ser axiomática y algorítmica para ser formal. Su carácter formal proviene de otro lado. Proviene de su uso de un lenguaje simbólico que permite el cálculo con formas generales. Si queremos entender la naturaleza formal de la ciencia lógica, por lo tanto, es esencial entender su lenguaje simbólico.

---

39 Para distinguir entre el formalismo de Thomae y el proyecto de Hilbert, historiadores como Grattan-Guiness (2000) suelen distinguir entre un formalismo ‘de marcas en papel’ y la versión mas sofisticada de Hilbert

40. Una breve pero suficientemente detallada historia de la conexión entre el proyecto de Hilbert y cuestiones de computabilidad en matemáticas se encuentra en Shapiro (1994)

41. Detlovs y Podnieks (2000-2002, §1.1)

Al igual que el común de los lenguajes formales, los símbolos de la lógica se dividen en constantes y variables.[42] En las secciones anteriores hemos visto la importancia de las variables para la lógica formal. El papel de las constantes es diferente. Entre las constantes lógicas, los operadores lógicos ocupan un lugar destacado,[43] pues son ellos los que distinguen al lenguaje lógico del resto de los lenguajes simbólicos. Son ellos los que le otorgan su carácter lógico. De una manera un poco simplificada, podríamos decir que la naturaleza matemática de la lógica simbólica descansa en sus variables, mientras que su carácter propiamente lógico descansa en los operadores. La lógica simbólica es formal por el uso que hace de las variables, y lógica por la naturaleza de sus operadores.[44]

4. Conclusiones

La lógica matemática es matemática tan sólo en tanto que usa herramientas matemáticas. En este sentido, la lógica matemática lo es de la misma manera que lo es, digamos, la mecánica newtoniana. En ambos casos, el método es matemático, pero ellas mismas, las ciencias mismas, no son matemáticas. Su objeto de estudio pertenece a una realidad independiente. Además, la lógica matemática es formal en tanto que las herramientas matemáticas que usa – tanto en su simbolismo como cálculo – son aquellas que originalmente recibieron el nombre

---

[42]. En sentido estricto, existe una división más básica entre los símbolos de la lógica simbólica: entre símbolos de puntuación y símbolos significativos. Los símbolos de puntuación mas comunes en la lógica simbólica son los paréntesis y las comas. Éstos tienen una función meramente auxiliar y en la mayoría de los casos son prescindibles. Si bién nos ayudan de sobremanear en la lectura de las fórmulas, todo lo que se puede expresar con ellos se puede expresar también sin ellos a partir de convenciones de lectura. Por ello, su papel dentro de la lógica simbólica no es relevante a la discusión presente. Una visión contraria sobre la importancia de los signos de puntuación en la lógica aparece a la base de la 'lógica amigable a la independencia' [independence-friendly logic] de Jaako Hintikka, quien suele decir, sin ironía alguna, que los paréntesis son los símbolos lógicos más importantes. Para una introducción a este tipo de lógica, véase el capítulo "Game-theoretical semantics" del Handbook of Logic and Languge editado por Johan van Benthem y Alice ter Meulen (1997)

[43]. El resto de las constantes lógicas simbolizan objetos primitivos particulares.

[44]. Es por ello que muchos de los debates filosóficos importantes alrededor de la lógica se ocupan precisamente de estos operadores lógicos. Baste recordar que al centro de la problematización filosófica de la lógica descansan las preguntas ¿cuáles son exactamente los operadores lógicos? y ¿cuál es su significado?

de 'formales' en matemáticas, es decir, aquellas desarrolladas en la era moderna originalmente para el desarrollo algebraico de la geometría y, luego, se volvieron hegemónicas en el resto de las matemáticas. Estas herramientas son formales, no directamente en el sentido que este término ha adquirido a partir de Hilbert, sino porque permiten el cálculo con formas generales.[45]

BIBLIOGRAFÍA

Aliseda, Atocha (1997), Seeking Explanations: Abduction in Logic, Philosophy of Science and Artificial Intelligence, Institute for Logic, Language, and Computation, Dissertation Series, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam.

Barwise, Jon (ed.) (1977), Handbook of Mathematical Logic, North Holland, Amsterdam.

Bealey, Michael (2002) "Decompositions and Transformations: Conceptions of Analysis in the Early Analytic and Phenomenological Traditions", The Southern Journal of Philosophy, suplemento al vol. XL, pp. 53-99.

Beall, J. C. y Greg Restall (En Prensa), "Defending Logical Pluralism" en B. Brown y J. Woods (eds.), Logical Consequences, Kluwer, Dordrecht.

(2000), "Logical Pluralism", Australasian Journal of Philosophy, col. 78, núm 4, pp. 475-493

[45]. El origen de este trabajo es una plática que, bajo el título de "¿Porqué la Lógica es Filosofía y no Matemáticas?", presenté dentro del Primer Coloquio de Filosofía "La Importancia de la Lógica en el Estudio de la Filosofía", organizado por la Coordinación de Filosofía del Sistema de Universidad Abierta de la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM, el 17 de Noviembre de 2002. Agradezco a la mencionada coordinación por su invitación, y a mis compañeros de mesa durante esa presentación, Pedro Ramos y Arturo Yañez, por sus comentarios. Aún mayor agradecimiento les debo a los árbitros anónimos de Dianoia por sus acertados y útiles comentarios. La presente versión también fue enriquecida por valiosas discusiones con Raymundo Morado y los miembros del seminario informal de Filosofía de las Matemáticas: Silvio Pinto, Max Fernández de Castro y Javier Elizondo.

Boghossian, Paul (2001), “How are Objective Epistemic Reasons Possible?”, Philosophical Studies, núm. 106, pp. 1-40.

Boole, George (1847), The Mathematical Analysis of Logic: Being an essay towards a calculus of deductive reasoning, Macmillan, Cambridge.

Curry, H. B. (1963), Foundations of Mathematical Logic, McGraw-Hill, Nueva York.

De Morgan, S. E. (1847), Formal Logic, Walton & Maberly, Londres.

Detlovs, Vilnis y Karlis Podnieks (2000-2002) Introduction to Mathematical Logic, Hyper-textbook for students, http://www.ltn.lv/~podnieks/mlog/ml.htm.

Dunn, Michael y G. M. Hardegree (200), Algebraic Methods for Philosophical Logic, Oxford Logic Guide No. 41, Oxford University Press, Nueva York

Frege, Gottlob (1884), Die Grundlagen der Arithmetik; eine Logisch-Mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Willhelm Koebner Verlag, Breslau.

Grattan-Guiness, Ivor (2000), The Search for Mathematical Roots (1870-1940). Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel, Princeton University Press, Nueva Jersey.

Hintikka, Kaarlo Jaakko Juhani y Unto Remes (1974), The Method of Analysis: Its Geometrical Origin and its General Significance, D. Reidel, Dordrecht.

Kant, Emmanuel (1984), Prolegómenos a toda Metafísica Futura que haya de poder presentarse como Ciencia, trad. M. Caimi, Charicas, Buenos Aires.

Kramer, Edna E. (1982), The Nature and Growth of Modern Mathematics, Princeton University Press, Princeton.

Kirwan, Christopher A. (1995), “Logical Truth”, en Ted Honderich (ed.), The Oxford Companion to Philosophy, Oxford University Press, Nueva York.

Leibniz, G. W. (1666), "Dissertatio de Arte Combinatoria, cum Appendice" en C.J. Gerhardt Band (ed.) (1971), Leibniz: Mathematische Schriften, V, G. Olms Verlag, Hildesheim.

Lungarzo, C. (1984), "Interpretaciones Filosóficas de Teorías Lógicas No Ortodoxas", Polémos, vol. 1, núm. 1, pp. 5-33.

Maddy, Penelope (1997), Naturalism in Mathematics, Clarendon Press, Oxford.

Mansel, L. H. (1851), "Recent Extensions of Formal Logic", North British Review, pp. 90-121.

Moore, George Edward (1899), "The Nature of Judgement", Mind, núm 8, pp. 176-193

Morado, Raymundo (1984), "La Rivalidad en Lógica" Diánoia, Fondo de Cultura Económica/UNAM, México, pp. 237-249.

Neal, Philip (2000), "Abduction and Induction: a Real Distinction?", en Harry C. Bunt y William Black (eds.), Abduction, Belief and Context in Dialogue : Studies in Computational Pragmatics, J. Benjamins, Amsterdam.

Nidditch, P. H. (1962), The Development of Mathematical Logic, Routledge and Kegan Paul, London.

Palmer, Anthony (1988), Concept and Object. The Unity of the Proposition in Logic and Psychology, Routledge, London.

Peacock, G. (1830), A Treatise on Algebra, Cambridge, Deighton.

Peregrin, Jaroslav (1998), "Review: J. van Benthem and A. ter Meulen, eds. Handbook of Logic and Language", Prague Bulletin of Mathematical Linguistics, núm 69, pp. 51-55.

Pycior, Helena M. (1994), "Matemathematics and Prose Literature" en I Grattan-Guiness (ed.), Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, Routledge, Londres, pp. 644-655.

Quine, William (1970), Philosophy of Logic, Foundations of Philosophy Series, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

Resnik, Michael D. (1987), Mathematics as a Science of Patterns, Oxford University Press, Nueva York, pp. 162-166.

(2000), "Against Logical Realism", History and Philosophy of Logic, núm. 20 , p.p. 181-194.

Shapiro, Stewart (2000), Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics, Oxford University Press, Nueva York.

(1997), Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology, Oxford University Press, Nueva York.

(1994), "Matemathematics and Computability" en I Grattan-Guiness (ed.), Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, Routledge, Londres, pp. 644-655.

Thomae, J. K. (1880) Elementare Theorie der Analytischen Functionen einer Complexen Veränderlichen, Halle, Niebert.

Woods, John (2000), "How Philosophical is Informal Logic?", Informal Logic, vol. 20, núm. 2, pp. 139-167.

Wright, Crispin (2001) "On Basic Logical Knowledge. Reflections on Paul Boghossian's 'How are Objective Epistemic Reason Possible?", Philosophical Studies, núm. 106, pp. 41-85.

Xiang, Huang (2002), Hacia una Teoría Contextualista del Razonamiento. Algunas Implicaciones para la Filosofía de la Ciencia, tesis para optar por el título de Doctor en Filosofía de la Ciencia, UNAM.