# Los Enfoques Analítico y Sintético
# de las Funciones Lógicas

Axel Arturo Barceló Aspeitia
Instituto de Investigaciones Filosóficas
abarcelo@filosoficas.unam.mx

Silvio Pinto (ed.), *Bertrand Russell y el Análisis Filosófico a partir de "On Dennoting",* Biblioteca de Signos, UAM-Iztapalapa / Casa Juan Pablos, México 2008. ISBN UAM: 978-970-31-0840-4, CJP: 978-968-9172-44-4. Pp. 203-228.

> Russell (1919, 201) famosamente dijo que "hay palabras que expresan forma." Creo que, a menos que se añada algo mas, decir esto es algo bizarro. Creo que las palabras que expresan forma, en el sentido normal de la palabra, tendrían que ser, no 'y' y 'todo', sino 'molde' o, de hecho, 'forma'.
>
> Peregrin (2000, 570 n. 27)[1]

**Introducción**

Que la introducción de la noción matemática de *función* a la lógica filosófica produjo una profunda revolución en el campo a finales del siglo XIX algo es bien sabido. Lo que es menos sabido – por lo menos entre los lógicos contemporáneos –, es que, al mismo tiempo, la matemática vivía su propia revolución, y que la noción misma de función era parte del terreno en disputa. Los bandos principales de esta contienda eran los enfoques *analítico* – también conocido como algebráico, concreto o constructivo – y *sintético* – también llamado lógico, abstracto o postulativo.[2] Bajo el enfoque analítico , la distinción entre función y argumento se concebía como una distinción entre partes de un todo. Bajo la concepción sintética, en contraste, la función era vista como una relación externa entre argumento y valor.

---

[1]. Excepto dónde se indica, todas las traducciones son mías.
[2]. Tomo esta distinción de Kleiner (1989).

La concepción analítica se fundo en el método analítico de distinguir elementos variables e invariantes en objetos matemáticos complejos. En consecuencia, modelaron el concepto de función bajo el paradigma explicativo parte/todo. Los matemáticos sintéticos en contraste, concebían a las funciones como representaciones de relaciones externas entre objetos independientes. El debate entre ambos enfoques tenía tal prominencia dentro de la práctica matemática del siglo XIX y bien entrado el siglo XX (Curry 2001), que no es de sorprender que el nacimiento de la lógica matemática se haya visto profundamente afectado por él. Aún así, la gran mayoría de los lógicos contemporáneos desconocen la distinción, pese a yacer en las raíces (matemáticas), mismas de nuestra disciplina. El propósito de esta plática es hacer conciencia de este hecho y argüir por su relevancia filosófica, hoy en día.

## 1. Confusión en la Ortodoxia Lógica Formal

Para empezar, quiero demostrar que ignorar la naturaleza del debate del que pretendo hablar en este texto ha dado pie a ciertas ambigüedades en la manera en que se conciben y presentan las funciones lógicas en nuestra disciplina. Por ello, aparece de manera más patente en libros de texto que en textos de investigación. Tomemos algunos de ellos como ejemplo: *Introducción a la Lógica Matemática* de Herbert Enderton (1987), *Introduction to Mathematical Logic* de Elliott Mendelson (1987), y *Logic, Language, and Meaning* de L. T. F. Gamut (1982). He elegido estos tres textos pues son representativos de los textos introductorios que se usan hoy en día para enseñar la lógica matemática a estudiantes de filosofía (Mendelson), matemáticas (Enderton) y lingüística (Gamut).

Apenas en el segundo párrafo de su (1987), Herbert Enderton escribe:

> Como primer ejemplo, el enunciado "Se observaron trazas de potasio" se puede traducir al lenguaje formal como, digamos, el símbolo **K**. Entonces, para el enunciado relacionado "No se observaron trazas de potasio",

> podemos usar (¬**K**). Aquí, ¬ es nuestro símbolo para la negación, que se lee "no". (Enderton 1987, 33)

También al mero principio del primer capítulo de su (1987), Elliott Mendelson escribe:

> Los enunciados pueden combinarse de varias maneras para formar enunciados mas complejos. Consideraremos solo combinaciones *veritativo-funcionales* en los que la verdad o falsedad del nuevo enunciado queda determinada por la verdad o falsedad de sus enunciados componentes.
>
> La *Negación* es una de las más simples operaciones sobre enunciados… Otra operación veritativo-funcional es la *conjunción*: 'y'. (Mendelson 1987, 10)

A la hora de introducir las conectivas lógicas, L. T. F. Gamut (1982) dice algo similar:

> La lógica proposicional es el sistema lógico mas simple y básico que hay. Como constantes lógicas tiene a las *conectivas* y la *negación*; las primeras unen dos enunciados juntos en un nuevo enunciado compuesto, mientras que la última opera sobre un solo enunciado… Conectivas que producen enunciados cuyo valor de verdad depende solo de los valores de verdad de los enunciados conectados se llaman *veritativo-funcionales*. Por lo tanto, 'y' es, y 'porqué' no es, una conectiva veritativo-funcional. (Gamut 1991, pp. 28, 29).

En los tres casos podemos ver cierta ambigüedad a la hora de introducir las *conectivas lógicas*. En estos textos, este tipo de operadores lógicos, además de ser símbolos constantes del cálculo lógico, aparecen simultáneamente como representando (i) operaciones sintácticas entre enunciados, y (ii) un tipo de palabras del lenguaje ordinario que incluye a "y", "o", "no", etc. Detrás de éstos y similares pasajes en la literatura lógica se esconde una confusión recurrente, fruto de la inconciencia de la incompatibilidad de dos enfoques distintos del concepto de función en general, y función lógica en particular.

## 2. La Ambiguedad

Como podemos ver en los textos anteriores, tradicionalmente se dan dos respuestas a la pregunta: ¿qué simbolizan los operadores lógicos?

(i) Por un lado, las constantes lógicas se conciben como símbolos de operaciones lógicas – de ahí que a veces se les conozca también como 'operadores lógicos.' Se dice, por ejemplo, que el conectivo '$\neg$' simboliza la operación de *negación*, la cual es una operación sobre enunciados, es decir, un tipo de función lógico-sintáctica. Bajo esta concepción sintética, las operaciones lógicas, mapean enunciados (o conjuntos ordenados de ellas) a otras. Por ejemplo, la operación de negación mapea la enunciado "lloverá mañana" al enunciado complejo "no lloverá mañana." Obedeciendo la ortodoxia matemática contemporánea, el valor de aplicar una operación monádica a un argumento se expresa anteponiéndole el símbolo de la operación. Es por ello que la negación de un enunciado $p$ queda expresada en la fórmula $\neg p$. En el caso de operadores diádicos, en contraste, el símbolo del operador se coloca entre los dos argumentos. Es por ello que, en lógica simbólica, la disyunción de dos proposiciones $p$ y $q$ se expresa en la fórmula '$p \vee q$' en vez de '$\vee(p, q)$.' Lo mismo ocurre con los conectivos '$\wedge$', '$\rightarrow$' y '$\leftrightarrow$'.

(ii) Por otro lado, los operadores lógicos también se ven como constantes del lenguaje formal que simbolizan expresiones sincategoremáticas en el lenguaje natural. Alfred Tarski, por ejemplo, en su libro de texto de lógica *Introduction to Logic and the methodology of Deductive Sciences* (1965), escribe

> Al describir este método [el cálculo de enunciados] es conveniente usar un simbolismo especial. Habremos de remplazar las expresiones:
>
> *no*; *y*; *o*; *si . . ., entonces*; *si, y sólo si*
>
> por los símbolos
>
> $\neg$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$
>
> respectivamente. El primero de estos símbolos se coloca al frente de la expresión cuya negación quiere uno obtener; el resto de los símbolos se

> colocan siempre entre dos expresiones (“→” simboliza, por lo tanto, a la palabra “*entonces*”, m ientras que la apalbra “*si*” simplemente se omite). (Tarski 1965, p. 39)[3]

En lo que sigue argumentaré que la distinción entre (i) y (ii) corresponde a dos enfoque, históricamente distintos, del concepto de función lógica. También demostraré que su confusión no es filosóficamente inocua, sino que tiene consecuencias para debates filosóficos importantes, como la naturaleza de los conceptos, el carácter vicioso de la circularidad y la naturaleza de la deducción formal.

## 3. Los Enfoques Analítico y Sintético en Matemáticas

Como es bien sabido, en la matemática contemporánea, una función es objeto matemático abstracto que asigna a uno o más objetos – los argumentos – a lo mas otro objeto – su valor. Es fácil darse cuenta que, en la mayoría de las funciones matemáticas, ni el argumento ni la función misma aparecen como parte de sus valores. Tómese por ejemplo la operación aritmética de adición, sobre los números naturales. Cuando uno añade, digamos, 5 a 2, ninguno de estos números ocurre como parte de su suma, es decir, 7. Que 5 + 2 = 7 no implica que 5, 2 o la operación misma de adición ocurran o sean componentes del 7.

Sin embargo, hay un área de las ciencias formales en la que las funciones son más bien de este tipo, donde argumento y función ocurren como partes de sus valores. Estoy hablando de las sintaxis de los lenguajes formales. Considere, por ejemplo, la operación

[3]. Nuestro mismo Raúl Orayén en su Lógica, Significado y Ontología, escribe: “[D]entro del lenguaje formalizado, [la constante lógica] c funciona como una “contrapartida formal” de una expresión lógica (o “palabra lógica”) del lenguaje cotidiano... Se dice, por ejemplo, que las constantes lógicas “◊” y “⁄” son las “contrapartidas formales” de las “palabras lógicas” ‘y’, ‘o’, respectivamente.” (Orayén 1989, 174) Enderton (1987) prefiere hablar de ‘traducción’, en vez de ‘contrapartida formal’: “[U]samos nuestro símbolo de conjunción como traducción de “y” [y] la conocida flecha como traducción de “si..., entonces...”. (Enderton 1987, 34) Sin embargo, la idea sigue siendo la misma: las conectivas lógicas simbolizan – traducen o reemplazan – partículas del lenguaje natural como “o”, “y”, etc. Por ejemplo, el ya mencionado ‘ÿ’ simboliza, entre otras, a la partícula ‘no.’ De la misma manera, pero en la lógica modal, la caja y el diamante simbolizan predicados como ‘es necesario (que)’ y ‘es posible (que)’ respectivamente.

sintáctica de suma lógica – en contraste con la operación aritmética del párrafo anterior. En la sintaxis estándar de la lógica proposicional, ésta operación mapea pares de fórmulas bien formadas a nuevas fórmulas formadas por el símbolo de suma lógica flanqueada por las dos fórmulas originales (y encerradas en un par de paréntesis). En este caso, las fórmulas originales – los argumentos de la operación sintáctica – Ocurren dentro de la nueva fórmula compleja que su valor para dicha función. La mayoría, si no todas las funciones sintácticas producen valores que contienen a sus argumentos como componentes. Sin embargo como ya lo he dicho son más bien casos excepcionales dentro de la matemática.[4]

Consideremos ahora, un tercer tipo de funciones, las funciones lógicas. La suma lógica, por ejemplo, ¿es mas como la adición aritmética o como la adición sintáctica?

Pese a que, como he dicho en la sección anterior, la gran mayoría de las funciones matemáticas son sintéticas y no analíticas, por lo menos durante el siglo XIX y bien entrado el siglo pasado – precisamente en el tiempo en que pensadores como De Morgan, Boole y Frege trabajaban en introducir la noción matemática de función en la lógica –, las funciones se presentaban comúnmente ésta de manera analítica. (Cf. Luzin 193?)

A todo lo largo de este período, la distinción entre función y argumento se introducía en una de las siguientes dos maneras: (1) Como el elemento invariante en un sistema de transformaciones o (2) como un elemento insaturado al que le falta algo para estar completo. En el primer caso, la distinción entre función y argumento se convierte en

[4] , Russell mismo reconoció esto. En (1914), escribió: "una función es *proposicional* cuando sus valores son significados complejos que contienen a sus argumentos respectivos como componentes, en la manera en que un componente de una proposición esta contenido en una proposición. Esto no es una característica de las funciones en general; por ejemplo 'el centro de masa de *x*' es una función de *x*, pero *x* no es un componente de su centro de masa." (p.249)

la distinción entre un elemento variable (el argumento), y un elemento que permanece constante (la función).[5]

Entonces, ¿porque veían la mayoría de los algebristas del siglo XIX a las funciones bajo un enfoque analítico? Desde un punto de vista histórico, la respuesta es simple. Basta recordar que, por lo menos hasta finales del siglo XIX, el estatus del álgebra como rama genuina de las matemáticas seguía en cuestión. Muchos matemáticos veían al álgebra tal y como había sido introducida en el pensamiento occidental de la matemática árabe:[6] como una serie de métodos para resolver ecuaciones (polinomiales). [7] Como tal, no era matemáticas sino una serie de estrategias *para* hacer matemáticas. Y aunque el álgebra vivía un periodo de gran desarrollo, seguía siendo vista por la mayoría de los matemáticos como el estudio de ecuaciones y sus transformaciones. Así pues, no parecía contar con ningún tipo de objetos matemáticos propios. Bajo esta luz, el enfoque analítico, con sus transformaciones y objeto insaturados, parece mas apropiado. Si uno piensa que aquello que siendo analizado en términos de función y argumento no es un objeto matemático genuino, si no las meras ecuaciones y expresiones del lenguaje matemático, entonces tiene

---

[5]. Tómese un objeto complejo. Substituya uno de sus elementos (no necesariamente simple) por otro del mismo tipo de manera tal que el complejo nuevo resultante también este bien formado. La parte que permanece constante a través de la sustitución es la función, mientras que el elemento que cambia es su argumento. En el segundo enfoque, una vez mas, se empieza con un objeto complejo. Pero esta vez se elimina uno de sus elementos (no necesariamente simple). La parte que queda es la función. La que se elimino es el argumento. De esta manera, la función no es invariante si no incompleta. Cuando se completa con el elemento eliminado, el objeto original re-aparece. La misma estrategia se puede seguir eliminando (o variando) no uno si no dos elementos, de tal manera que obtengamos una relación, la cuál puede, por lo tanto, verse como un tipo especial de función.

Ambas estrategias son muy parecidas y, si uno ve a la substitución como el eliminar un elemento y poner otro en su lugar, se convierten en equivalentes. (Aquí, estoy en desacuerdo con Sandra Lapointe (2002), quien cree que estas dos estrategias de análisis son, no solamente diferentes si no completamente independientes. Desafortunadamente, en el mentado (2002), Lapointe no nos da ningún argumento para ello, excepto el decir que no le parece en la página 109).

[6]. Esto no significa, sin embargo, que así fuera como la concebían los árabes. Mas bien, así era como muchos matemáticos occidentales interpretaban lo que hacían sus contrapartes árabes.

[7] . De hecho, esta imagen del álgebra sobrevivió hasta bien entrado el siglo XX. Leo Curry (2001) encuentra el inicio de nuestra visión estructural del álgebra en 1930, cuando van der Werden reorganizó el corpus algebraico en un campo unificado alrededor de la noción ‘estructura algebraica’. Sin embargo, también reconoce que el sentido analítico previo tardo mucho mas en ser completamente desplazado.

sentido adoptar un enfoque sintáctico. A fin de cuentas los matemáticos previos de siglos adoptaron este enfoque precisamente porque los objetos de su análisis *eran* objetos sintácticos.

Sin embargo, pronto aparecieron disidentes que se oponían a la concepción sintáctica. Estos preferían pensar en las funciones como correlaciones entre objetos. Ambas posiciones eran conciliables solo si estas correlaciones podían ser expresables en 'expresiones analíticas' (ecuaciones algebraicas, es decir, con variables). Por ello, dicha cuestión se convirtió en un asunto de intenso debate a lo largo del siglo XIX con resonancias hasta la fecha.

## 4. Lógica Analítica y Sintética

En lógica, es común hablar de, por ejemplo, enunciados de la forma $\neg p$, $\Box (p \wedge q)$ o cualquier otra fórmula de los diferentes lenguajes simbólicos de la lógica matemática. Se dice que estas formulas del lenguaje lógico simbólico expresan la *forma lógica* de enunciados del lenguaje natural. Esta es otra tesis poco controversial dentro de la ortodoxia lógica. Sin embargo, representa un problema para aquellos que quieran sostener, al mismo tiempo, (i) y (ii). El problema es: ¿qué papel juegan los operadores lógicos, como símbolos, en la expresión de la forma lógica de enunciados? Los enfoques analítico y sintético tienen respuestas distintas a esta pregunta. De acuerdo con el enfoque sintético, un enunciado tiene la forma $\Diamond p$, por ejemplo, si es el resultado de aplicar la operación lógica de posibilidad al enunciado (simbolizado por) $p$. De acuerdo al enfoque analítico, en contraste, un enunciado tiene la mencionada forma si sus dos componentes lingüísticos son la frase modal 'Es posible (que)' (o una similar) y el enunciado (simbolizado por) $p$. Es tradicional, en la lógica simbólica, ver a los operadores lógicos de ambas maneras. Cuando se dice que enunciados como 'Es posible que llueva mañana" o "Posiblemente lloverá mañana" tienen la forma $\Diamond p$, se sostiene tanto que (i) tales enunciados son el resultado de aplicar el operador modal de posibilidad al enunciado "lloverá mañana" y que (ii) están compuestos de una frase modal como 'Es posible que' o 'Posiblemente' y el enunciado antes mencionado. Sin embargo, esta doble dimensión de los operadores lógicos no obedece los cánones matemáticos, y se basada en un confusión entre el uso (de operaciones lógico-sintácticas en la construcción de enunciados) y la mención (de palabras lógicas dentro de un enunciado complejo del lenguaje natural).

Veamos como surge esta confusión. Si los operadores simbolizan operaciones y éstas han de entenderse de la misma manera sintética que operaciones en otros ámbitos de la matemática (es decir, si la lógica simbólica ha de ser considerada también *matemática*), entonces fórmulas como $\neg p$ o $\Diamond p$ deben de interpretarse de la misma manera que otras expresiones matemáticas de la misma forma $f(a)$. Considere cualquier operación matemática $f$ definida sobre un dominio D tal que $a$ pertenezca a D. La fórmula $f(a)$ expresa la imagen de $a$ bajo $f$. Sea cual sea el objeto representado por $f(a)$, uno no dice que $a$ (o $f$, a decir verdad) *ocurre* en él. Tomemos un ejemplo muy sencillo: la adición de números naturales en la aritmética elemental. Esta operación aritmética se simboliza con el signo '+.' La suma de dos números naturales cualesquiera $n$, $m$ – es decir, el resultado de aplicar la operación de adición a $n$ y $m$ – se expresa en la fórmula '$n + m$,' donde '$n$' y '$m$' son los numerales correspondientes a los números $n$ y $m$. Hasta aquí, lo mismo sucede en la lógica matemática. La conjunción de dos enunciados cualesquiera $p$ y $q$, es decir, el resultado de aplicar la operación de conjunción a $p$ y $q$, se expresa en la fórmula '$p \wedge q$' – donde las letras '$p$' y '$q$' simbolizan los enunciados $p$ y $q$, y el conectivo '^' simboliza la operación de conjunción, tal y como lo señala el enfoque sintético. Sin embargo, en el caso de la adición aritmética, no hay un correlato del enfoque analítico ya superado en matemáticas. No existe la costumbre de decir que el operador simboliza algún elemento del valor de tal operación.

Según el enfoque sintético (i), $\neg p$ simboliza la imagen de $p$ bajo la operación lógica de negación, lo cual no implica que ésta se componga de $\neg$ y de $p$. Sin embargo, esto es lo que afirma el enfoque analítico (ii). Dependiendo de cómo se interprete la función lógica, ya sea analítica o sintéticamente, queda uno comprometido a que $p$ ocurra o no dentro de $\neg p$, $\Diamond p$, $p \wedge q$, etc.[8]

Bajo un enfoque sintético, las operaciones lógicas establecen relaciones lógicas externas a los objetos en relación. Hay, por ejemplo, diferentes maneras de especificar esta relación. Desde un punto de vista inferencialista, por ejemplo, se dice que una proposición $p$ es la conjunción de dos otras proposiciones $q$ y $r$ (o, en otras palabras, es de la forma $q\&r$) si y solo si $p$ se sigue lógicamente tanto de $q$ como de $r$ y, a su vez, $q$ y $r$ ambas se siguen lógicamente de $p$. Bajo una explicación veritativo – funcional, $p$ sería la conjunción de $q$ y $r$ si solo si $p$ es verdadero cuando y solo cuando $q$ y $r$ son ambas verdaderas. En

[8]. En el caso de los operadores modales, sostener la tesis de que el enunciado p ocurre en $\Diamond$ p o $\Box$ p enfrenta otra dificultad, ya que ignora la distinción entre enunciados en indicativo y subjuntivo. Esta distinción no existe o no es muy clara en el caso de lenguajes como el inglés – tal vez el lenguaje más común en la lógica simbólica profesional. Pero, en español, es claro que los enunciados que ocurren en el contexto de frases modales como 'es necesario que' o 'es posible que' no son enunciados completos que podrían ocurrir aislados, o sin trans-formación gramática. En "es posible que mañana llueva" no ocurre el enunciado en indicativo "mañana lloverá", sino su contraparte subjuntiva "mañana llueva", la cual no es una enunciado completa. En consecuencia, esta frase subjuntiva no podría llamarse enunciado y mucho menos ser calificadas de ver-dadera o falsa. No podría considerarse (o su contenido) una proposición en el sentido usual.

Esta distinción, aunque gramática, es lógicamente importante porque se corresponde con la distinción lógica entre proposiciónes *fácticas* y *epistémicas*, la cual es esencial para el estudio de actitudes proposicionales. Comúnmente, las actitudes proposicionales se dividen en *epistémicas* y *factuales* dependiendo del tipo de proposiciones que toman como objeto. Las actitudes mas comunes – como creencia, orgullo, y la mayoría de las actitudes emotivas – son factuales. Toman proposiciones factuales (no confundir con *fácticas*, es decir, proposiciones verdaderas *de hecho*), como sus objetos. Estas proposiciones se expresan en enunciados en indicativo. Es correcto decir que uno cree que mañana lloverá, pero no que cree que mañana llueva. Sin embargo, hay también actitutdes epistémicas –como el deseo, el temor, etc.– que toman proposiciones epistémicas, expresadas en subjuntivo, como sus objetos. En estos casos es correcto decir que uno desea que mañana llueva, pero no que mañana lloverá.

ambos casos se puede explicar la operación sin sostener que *q* y *r* son componentes de *p.* Una explicación sintética similar se puede dar para el resto de las operaciones lógicas.

Desde un enfoque analítico, en contraste la forma lógica de una proposición esta determinada por los componentes de la misma y el papel que juegan en ella. Así pues, se dice que una proposición *p* es la conjunción de dos otras proposiciones *q* y *r* (o, en otras palabras, es de la forma *q&r*) si y solo si *p* puede descomponerse en tres partes *q*, *r* y una palabra lógica *c* para la conjunción – como 'y', 'pero', 'además', etc. – de manera tal que *c* liga gramaticalmente a *q* y *r*.

Una de las diferencias principales entre ambos enfoques es la mediación del lenguaje. En el enfoque analítico, el reconocimiento de la forma lógica de una proposición se encuentra mediado comúnmente por un análisis lingüístico tal que uno puede estar tentado a decir que es. en primer lugar, el enunciado del que predicamos la forma lógica. Desde ese punto de vista, uno puede reconocer fácilmente que un enunciado tiene cierta forma aún si uno no le entiende completamente o sabe que proposición es expresada por ella. Todo lo que se necesita es que uno reconozca e identifique las palabras lógicas que ocurren en él. Tomemos por ejemplo, los siguientes enunciados:

(1) Si quieres hablar de mis litotes es porque se te da la logomaquia

(2) Quieres hablar de mis litotes

(3) Se te da la logomaquia

Uno puede saber fácilmente que la proposición expresada por el enunciado (1) (de existir) es la conjunción de las proposiciones expresadas por los enunciados (2) y (3), con solo reconocer la manera en que la palabra 'si' conecta ambos enunciados; aún si uno no sabe lo qué es un litote o la logomaquia. El reconocimiento de la forma involucrada parece ser muy básico y casi inmediato. Esto es lo que ha inspirado a filósofos como Crispin Wright a escribir:

> Juicios de *forma lógica* … a efecto de que *esta* proposición, o configuración de proposiciones, tiene tal-y-tal forma … -- por lo menos en los casos mas sencillos – ciertamente son directamente recognicionales [recognitional], en vez de inferencial … juicios básicos de forma lógica son a priori bajo cualquier buena definición de esa noción que pueda anticipar – pueden ser justificados por pura reflexión si alguno lo puede ser. (Wright 2001, 45-46).

Sin embargo, es importante darse cuenta que el lógico analítico no se esta comprometiendo con un formalismo ingenuo que hiciera de la formalización, en palabras de Dummett (1991, 42), "un proceso mecánico". Uno debe distinguir la posición analítica de aquella que sostiene que la formalización no requiere mas que del reconocimiento de la ocurrencia de palabras como 'y', 'o', 'si', 'no', etc. Cualquiera que haya tomado un curso elemental de lógica sabe muy bien que formalizar enunciados o es tan simple. Una palabra lógica como 'y', por ejemplo, puede señalar tanto una conjunción como una disyunción. Para identificar que función lógica significa (si alguna) la palabra, uno debe de hacer un análisis lógico mas profundo. Uno debe de tomar en consideración, por ejemplo, su contribución, rol inferencial del enunciado completo. Como bien señala Jaroslav Peregrin (2000, 568):

> Supóngase que alguien arguyera que el *modus ponens* no es válido en español y tratara de justificarlo señalando que los enunciados 'Paris esta en Francia' y 'Paris esta en Francia o Paris esta en China' son verdaderos, pero el enunciado 'Paris esta en China' es falso. Ciertamente protestaríamos que 'o' *no* es una implicación. Sin embargo, ¿de que otra manera podríamos justificar nuestra protesta excepto señalando que el comportamiento inferencial de 'o' es diferente al de la implicación – es decir, que 'o' no obedece al *modus ponens* (y otras reglas de inferencia constitutivas de la implicación)?[9]

[9]. En este mismo ejemplo también se podría apelar a una explicación de las funciones lógicas en términos de condiciones de verdad que la palabra 'o' conecta enunciados de manera tal que el enunciado complejo es verdadero si solo si por lo menos uno de los enunciados unidos por lo conectivo es verdadero. De ahí sepamos que expresa una disyunción, y uno una implicación.

De este modo, se apela a información semántica sobre del significado de las palabras lógicas para identificar su ocurrencia dentro del enunciado. Las palabras lógicas no se pueden identificar nada mas por su forma morfológica (o función gramática básica) .[10]

Así, tanto el enfoque veritativo-funcional como el inferencialista cortan a través de la división analítico-sintético. Uno puede ser un inferencialista sintético como analítico. Lo mismo se puede decir de las explicaciones veritativo- funcionales de las funciones lógicas. La diferencia principal es que para los lógicos analíticos, dichos enfoques (inferencialista y veritativo funcional) explican de manera distinta el *significado* de las palabras lógicas, mientras que para el lógico sintético son, en primer instancia, explicaciones de la forma lógica. Un lógico sintético, una proposición como 'Paris esta en Francia o Paris esta en China' es de la forma *p&q*, porque guarda cierta relación inferencial o veritativa **externa** con las proposiciones 'Paris esta en Francia' y 'Paris esta en China' independientemente de si hay o no un componente de la proposición que señale tal forma.

## 5. Consecuencias Filosóficas de los Enfoques Analítico y Sintético

Aún mas, los enfoques analítico y sintético de las funciones lógicas tienen diferentes consecuencias en la aprehensión de conceptos complejos y proposiciones. Bajo el enfoque analítico, para captar un concepto complejo o proposición, uno debe aprender todas sus partes, incluyendo cualquier función lógica que ocurra en él. En el enfoque sintético, en contraste, dado que (la forma) y las funciones lógicas son externas a los concepto y las proposiciones relacionadas en ellas, [es decir, no ocurren dentro de ellas], es posible

[10]. Siguiendo esta línea de razonamiento, Raúl Orayen (1976, 1989) llega a decir que palabras como 'o', 'y', etc. *no* son palabras lógicas genuinas, sino ambiguas palabras del lenguaje ordinario que *en algunos casos* son sinónimas con las palabras lógicas genuinas. Las únicas palabras lógicas genuinas son los conectivos de nuestro lenguajes formal y regimentado.

aprehender estos últimos sin haber captado los primeros. De esta manera, la forma lógica de una proposición no se identifica con ninguno de sus componentes o arreglo.[11]

En (1991, 39), Dummet explícitamente dice que el proceso de aprehensión de una función lógica o proposicional "no busca, en general, extraer (sus)… componentes".[12] Para Dummet, las funciones lógicas no se 'captura' como si estuvieran ahí, sino que se forman a través del conocimiento de patrones. De esta manera, Dummet sitúa el debate analítico/sintético dentro del marco mas general del debate por la naturaleza, posesión y aprehensión de conceptos. Desde esta perspectiva, entonces, el enfoque analítico pertenece a una mas larga tradición aristotélica-lockeana, mientras que el enfoque sintético encaja mejor en un marco kantiano-popperiano.[13] Así como, para Aristóteles, los universales se encontraban en sus particulares, así también para el lógico analítico, las formas y funciones lógicas se encuentran en las proposiciones. En contraste, para un lógico sintético, las formas y funciones lógicas forman un marco o red externa a dichas proposiciones; – forma una especie de espacio lógico dentro de la cual las proposiciones se organizan.

En cada uno de los enfoques, las funciones lógicas aprehendidas de maneras radicalmente diferentes. Desde el punto de vista analítico, nuestra comprensión de las funciones lógicas puede explicarse fácilmente apelando a un proceso de análisis en el que

[11] . Laurence y Margolis (1999) llaman a los enfoques analítico y sintético, los modelos *inferencial* y de *contención* de la estructura conceptual.

[12] . Sorprendentemente, Levine y Dummet llaman a este proceso *descomposición*, aunque no nos dice nada a cerca de la composición de la proposición. Por lo tanto, evito su terminología.

[13] . En (2002), Hans Radder resume ambas tradiciones de la siguiente manera: "Un punto de vista – derivado de Emmanuel Kant y sostenido también por Karl Popper, entre muchos otros – afirma que al formar y usar conceptos estructuramos el mundo. Los conceptos producen o incrementan el orden. La segunda, y aún más antigua perspectiva – representada por la tradición aristotélica y por John Locke, por ejemplo – sostiene que los conceptos de forman abstrayendo las particularidades del mundo. Al eliminar las características accidentales o relevantes de entidades particulares, abstraemos un concepto como representante general de un tipo (natural)." (p. 55).

se identifiquen elementos variable e invariante dentro de la proposición.[14] En el enfoque sintético, por el contrario, no nos interesa directamente la composición de la proposición, no es directamente relevante sino su relación (lógica) con otras proposiciones (las cuales pueden estar señaladas por los componentes sintácticos de la proposición, pero no necesitan formar parte de ella).

Esta distinción, a su vez, tiene importantes consecuencias para el problema filosófico de explicar la necesidad y productividad de la inferencia deductiva. Ha sido arguído – por Russell (1937), Dummet (1981, 1991) y Levine (2002) – que las funciones lógicas fueran componente proporcional, (esto es, si uno tomara el enfoque analítico), la deducción lógica sería claramente analítica y, por lo tanto, necesaria pero no sorprendente. Por otro lado, si las funciones fueran relaciones externas entre conceptos y proposiciones (esto es, si uno tomara el enfoque sintético), la formalización se vería como una tarea productiva que involucra el descubrimiento de relaciones lógicas. Suena sensato decir que esto explicaría la productividad de la deducción lógica. Sin embargo, también la haría sintética (aunque no a-posteriori).

Así es como Dummett presenta este dilema:

> Cualquier explicación de la inferencia deductiva encara el problema de tener que explicar simultáneamente su justificabilidad y su productividad. Si ha de ser fructífera, debe reconocerse un sentido en el cual la conclusión representa nuevo conocimiento; si ha de estar justificada, la conclusión debe. en algún otro sentido, estar contenida en, o ya estar dada en, las premisas. La explicación [de Frege] de la productividad del razonamiento deductivo es clara. Depende del hecho de que podemos imponer un patrón sobre un enunciado complejo al cual no se apeló en la aprehensión del sentido de dicho enunciado, Por lo tanto podemos, darnos cuenta de relaciones entre

[14]. Este enfoque puede requerir la comparación entre diferentes proposiciones, pero dicha composición sería basada estrictamente en los componentes de la proposición y su arreglo dentro de ella. De esta manera, identificamos una función lógica como el elemento común a todas las proposiciones de la misma forma.

> enunciados. y entre los pensamientos que expresan de los cuales no nos habíamos dado cuenta cuando los aprehendíamos. (Dummet 1981, 290-1)[15]

Y este es un pasaje de Levine en el cual hace la misma observación:

> Al capturar un pensamiento, las únicas entidades que debemos aprender son los componentes últimos de dicho pensamiento; reconocer sus conexiones inferenciales puede requerir aprehender entidades (incluyendo funciones-de-pensamiento involucradas en la descomposición de dicho pensamiento) que no son componentes de dicho pensamiento. (Levine 2002, 2l5).

En otras palabras, si las funciones lógicas (lo que Levine llama 'funciones de pensamiento') no son componentes de una proposición (lo que Levine y Dummet, siguiendo a Frege llaman un 'pensamiento'), entonces reconocer qué funciones están involucradas en una proposición requiere un proceso cognitivo *diferente* a la mera aprehensión de dicha proposición y sus partes. De esta manera, podríamos explicar la productividad de la inferencia deductiva. Sin embargo, perderíamos la posibilidad de explicar la necesidad lógica de la inferencia deductiva en términos analíticos.

## 6. ¿Es Posible Resolver el Dilema?

Como hemos visto, los enfoques analítico y sintético se colocan en cuernos extremos de un par de dilemas fundamentales para la explicación de la naturaleza de las funciones lógicas.

---

[15] . En (1991), Dummet reitero este punto al escribir: "De esta manera, el razonamiento deductivo no es un proceso mecánico en lo absoluto, aunque puede presentarse de manera que pueda ser verificado mecánicamente: tiene un componente creativo, el cual requiere la aprehensión de patrones dentro de los pensamientos expresados, y de las relaciones entre ellos, los cuales no son requeridos o dados con la aprehensión de dichos pensamientos mismos. Dado que tiene un componente creativo, conocer las premisas de un paso inferencial no implica conocer la conclusión, aún cuando las consideremos de manera simultánea; y es por ello que el razonamiento deductivo puede producir conocimiento nuevo. Dado que podemos no distinguir los patrones relevantes, tal razonamiento es fructífero; pero, dado que están ahí para ser distinguidos, su validez no queda en cuestión.
Esa fue la solución de Frege al problema de la utilidad del razonamiento deductivo… Independientemente de si la explicación específica que ofreció Frege es adecuada en su totalidad o no, ciertamente es correcta en lo general [it is surely along the right general lines]. Todo el pensamiento conceptual involucra imponer de forma sobre una realidad amorfa: En la explicación de Frege, el razonamiento deductivo requiere una segunda imposición de forma sobre nuestros pensamientos. Ciertamente solo esa concepción puede explicar como tal tipo de razonamiento puede ser. al mismo tiempo. Fructífero. y correcto en virtud solamente del contenido de los pensamientos involucrados." (p. 42).
La única discrepancia entre Levine y Dummet es si esta solución puede atribuirse a Frege (como sostiene Dummet) o es mejor atribuírsela a Russell (como arguye Levine).

Por un lado, el enfoque sintético es el enfoque estándar sobre la funciones en la matemática contemporánea. Sería extraño que las funciones lógicas divergieran de las funciones matemáticas precisamente en este punto. Por el otro lado, el enfoque analítico es clave para permitir la formalización de argumentos y enunciados. Sin embargo, optar por sólo uno de los cuernos del dilema tendría consecuencias devastadoras para la lógica. La lógica moderna está construida sobre ambos pilares. Como dijimos con anterioridad, la naturaleza matemática de la lógica nos compromete con el enfoque sintético, mientras que el enfoque analítico garantiza su aplicabilidad a argumentos del lenguaje natural. Igualmente, el enfoque analítico nos permite explicar fácilmente la necesidad lógica de nuestras inferencias deductivas (apelando a su analiticidad), mientras que el enfoque sintético nos permite explicar su productividad, es decir, como es posible obtener nuevo conocimiento a través de ellas. Una vez más, optar por un solo cuerno, nos dejaría en una posición filosófica muy precaria. Por lo tanto, parece necesario, en ambos casos, conciliar ambas opciones para dar solución al aparente dilema. En lo que sigue, permítaseme aventurar una posible solución, de inspiración Fregeana.

El fundamento de mi propuesta de solución consiste en re-interpretar la noción de *ocurrencia* que maneja el enfoque analítico, para disolver su aparente conflicto con el enfoque sintético. Esto se lograría tan sólo con rechazar la interpretación de la composición de expresiones representada en la forma lógica de un enunciado como un mero *agregado* de sus componentes. Basta señalar que los constituyentes lógicos de un enunciado no son literalmente sus *partes*. De tal manera que los constituyentes lógicos de un enunciado *ocurren* en su compuesto sólo en un sentido *lógico-sintáctico* por especificar.

Existen varias maneras de especificar la composición lógica de un enunciado. Puede hablarse de composición en un sentido constructivo, por ejemplo. Esta especificación parte del supuesto de que toda oración pose una construcción lógica, la cual, en sus constituyentes últimos, llega hasta la expresiones primitivas mas básicas. Cada construcción de ese tipo determina un orden de expresiones. Este orden se expresa en la forma lógica del enunciado, de tal manera que cada símbolo de la formula corresponde a una expresión primitiva, y cada sub-fórmula corresponde a un paso en la construcción del enunciado cuya forma lógica la fórmula expresa. En este sentido, estas expresiones no ocurren *literalmente* dentro del enunciado mismo, sino dentro de su construcción (lógica). Por ejemplo, una proposición tiene la forma $\neg p$, si fue construida a partir de una expresión negativa primitiva (correspondiente al operador '$\neg$') y el enunciado representado por $p$ (de acuerda las reglas de su sintaxis). La construcción, a su vez, puede involucrar transformaciones de tal tipo que una o ambas de estas expresiones terminen no apareciendo como componentes sintáctico o *partes* de la expresión final. Sin embargo, uno puede seguir hablando de ellas como sus *constituyentes lógicas*. Por ejemplo, el paso de 'Mañana lloverá" a "Es posible que mañana llueva" involucra, no sólo la incorporación del componente modal "es posible que", sino también la transformación gramática de "Mañana lloverá" a "mañana llueva." Es por eso que "mañana lloverá" no es parte de "Es posible que mañana llueva" y, sin embargo, sí es uno de sus constituyentes lógicos, tal y como lo indica su forma lógica. En conclusión, los componentes sintácticos de las fórmulas lógicas no simbolizan los componentes sintácticos de los enunciados cuya forma lógica expresan. En otras palabras, las partes de las fórmulas no corresponden a las partes del enunciado. Esto es así porque la sintaxis de nuestra lógica simbólica no tiene como objetivo recuperar la sintaxis gramática del lenguaje natural, sino su forma lógica .

Ahora bien, si los elementos simbólicos que componen las fórmulas de nuestros cálculos lógicos no simbolizan partes del enunciado, ¿cuál es su relación con ellas? La respuesta es sencilla. Tradicionalmente, expresiones como 'no,' 'posiblemente,' 'solo si,' etc. se llaman también *indicadores de forma lógica.* Esto se debe a que, cuando simbolizamos un enunciado del lenguaje natural, no simbolizamos sus componentes linguísticos, sino que estos componentes nos sirven como indicadores de la forma lógica del enunciado. A fin de cuentas, la fórmula expresa sólo esta última. La ocurrencia de la frase 'probablemente' dentro de un enunciado, por ejemplo, sirve de marca para indicarnos que, la construcción lógica de ese enunciado incluye una aplicación de la operación de probabilidad. En este sentido, puede decirse que la frase 'probablemente' es la huella que dejó la aplicación de la operación dentro de la construcción lógica del enunciado. Entonces, podría decirse en general, que las partes del enunciado son las huellas que deja en él su proceso de construcción. De la misma manera, al nivel simbólico, los símbolos lógicos sirven una función análoga . Por ejemplo, la ocurrencia del operador '◊' dentro de una fórmula indica que la construcción del enunciado cuya forma lógica ésta expresa incluye una aplicación de la operación de posibilidad.

De esta manera, podemos explicar la relación entre operadores lógicos, operaciones lógicos y frases lógicas del lenguaje natural sin caer en las sobre-simplificaciones de la opción tradicional ingenua. De esta manera es posible tomar en serio las diferencias gramaticales del lenguaje natural, y conciliar las interpretaciones (i) y (ii) del papel de los operadores lógicos en la expresión de la forma lógica de enunciados del lenguaje natural. Basta hacer una interpretación constructiva de las nociones de *ocurrencia* y *composición* lógica.

## 7. Apéndice: Circularidad y Analíticidad

Al discutir el trabajo de Russell en los fundamentos de la matemática Penélope Maddy (1997) de pasada ofrece otro punto en el que los enfoques analítico y sintético de las funciones lógicas produce una discrepancia filosóficamente significante. Al igual que Levine (2002), Maddy encuentra una tensión en el trabajo de Russell, entre los enfoques sintético y analítico. Sin embargo, argumenta Maddy, al formular su teoría ramificada de tipos, Russell favorece una visión analítica de las funciones proposicionales para presentar su principio del círculo vicioso de una manera mas apetecible. Ciertamente, si uno concibe a las funciones de tal manera que "una función proposicional presupone o involucra sus valores" (1997, 9), entonces uno puede estar mas inclinado a aceptar que una función proposicional no pueda ser uno de sus propios argumentos y, por lo tanto, aceptar al principio del círculo vicioso de Russell como un principio lógico. De hecho, desde la perspectiva analítica, el principio del círculo vicioso de Russell parece seguirse del principio aún más básico de que nada puede ser una (propia) de si mismo. Desde un punto de vista sintético, en contraste, un principio como el de Russell parece arbitrario. Dado que las funciones son relaciones externas a sus argumentos y valores, no hay en principio ninguna razón lógica para rechazar tal tipo de circularidades. No hay razón *lógica* alguna por la cuál las funciones no puedan tomarse a si mismas como argumentos. [16] De hecho, trabajo reciente en lógica y teoría de conjuntos no-bien-fundados – como el de Barwise y Moss (1996 y 1991) – basado en el seminal trabajo de Aczel (1988), el rechazo a la circularidad como principio lógico. De esta manera, nos da por lo menos razones para sospechar del enfoque analítico sobre el que está fundado.

[16] . Por supuesto, si permitimos todo tipo de circularidades, pueden aparecer paradojas sin embargo, esto no es garantía suficiente para justificar la exclusión de *toda* circularidad.

## Referencias Bibliográficas


Aczel, P. (1988) *Non-Well-Founded Sets*. CSLI Lecture Notes 14, Stanford: CSLI Publications.

Barwise, J. and Moss, L. (1991) "Hypersets", *Mathematical Intelligencer,* no. 13. Pp. 31-41

Barwise, Jon and Lawrence Moss (1996) *Vicious Circles. On the Mathematics of Non-wellfounded Phenomena*, Stanford: CSLI

Curry, Leo (2001), "Mathematical Structures from Hilbert to Bourbaki: The Evolution of an Image of Mathematics" in Umberto Bottazzini and Amy Dahan Dalmedico, *Changing Images in Mathematics. From the French Revolution to the New Millenium*, London; Routledge, pp. 167-185.

Dummett, M. (1981), *The Interpretation of Frege's Philosophy*, Cambridge: Harvard University Press.

Dummett, M. (1991), *Frege: Phiolsophy of Mathematics*, Cambridge: Harvard University Press.

Enderton, H. (1987), *Una Introducción Matemática a la Lógica*, México D.F., Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM.

Frege, G. (1879) *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeteFormelsprache des reinen Denkens,* Verlag von L. Nebert, Halle.

Gamut, L. T. F., (1982), *Logic, Language and Meaning. V. 1 Introduction to Logic*, Chicago, University of Chicago Press. (Traducción al Español: 1992)

Kleiner, Israel (1989) "Evolution of the Function Concept; A Brief Survey", *The College Mathematical Journal*, vol. 20, no. 4, pp. 282-300.

Lapointe, Sandra (2002) "Substitution: An Additional Conception of Analysis in the Early Analytic and Phenomenological Traditions?: On Beaney", in T. Hogan et al. *Spindel Conference 2001. Origins: The Common Sources of the Analytic and*

*Phenomenological Traditions*, *The Southern Journal of Philosophy*, vol. XL, Suplement. Pp. 1011-13.

Laurence, Stephen y Eric Margolis, (1999) "Concepts and Cognitive Science" in Laurence and Margolis (eds.) *Concepts: Core Readings*, Boston: MIT Press/Bradford Books, Pp. 3-81.

Levine, James (2002), "Analysis and Decomposition in Frege and Russell", *The Philosophical Quarterly*, vol. 52, no. 207, Pp. 195-216.

Luzin, N. (193?) "Function: Part I" in Abe Shenitzer (ed. and trad.) "The Evolution of . . ." *American Mathematical Monthly*, January 1998. Pp. 59-67. Republished in Abe Shenitzer & John Stillwell (eds.) *Mathematical Evolutions*, Mathematical Association of America/Spectrum, 2001

Maddy, Penelope (1997) *Naturalism in Mathematics* (Oxford: Clarendon Press)

Mendelson, E. (1987) *Introduction to Mathematical Logic,* Belmont, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software.

Orayén, R. (1989) *Lógica, Significado y Ontología*, México D.F., Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM.

Orayen, Raúl (1976) "Verdad Lógica y Significado", with English summary by José Antonio Robles, *Crítica*, vol. VIII, no. 22. Pp. 11-43

Orayen, Raúl (1989), *Lógica, Significado y Ontología*, México: UNAM/IIFs (Pp. 167-203)

Peregrin, Jaroslav (2000), "*Fregean* Logic and *Russellian* Logic", *Australasian Journal of Philosophy*, vol. 78, no. 4, pp. 557-574

Radder, Hans (2002), "How Concepts both Structure the World and Abstract from it", *The Review of Metaphysics*, no. 55.

Russell, Bertrand (1914) "Logic in Mathematics" in *Posthumous Writings.* Pp. 203-250

Russell, Bertrand (1937), *The Principles of Mathematics*, 2nd edition, Cambridge University Press.

Tarski, A. (1965), *Introduction to Logic and the Methodology of Deductive Science* , New York, Oxford University Press.

Wright, Crispin (2001) ‘On Basic Logical Knowledge”, *Philosophical Studies*, no. 106. Pp. 41-85