Filosofía / Pensamiento

El libro universitario

María Manzano
Antonia Huertas

Lógica para principiantes

Contiene CD

Alianza Editorial

no cerveza $\Rightarrow$ *pescado*
helado o no cerveza $\Rightarrow$ *no pescado*

no (helado o no cerveza)
no helado
no (no cerveza)
cerveza

no (no cerveza)
cerveza
$\Uparrow$
$\boxed{1}$

pescado
$\Uparrow$
$\boxed{2}$

no pescado

no (no cerveza)
cerveza
$\Uparrow$
$\boxed{3}$

pescado
$\otimes$

Comentario 12 *Veamos las ramas* $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ *y* $\boxed{3}$. *En* $\boxed{1}$ *sabemos que el menú debe incluir cerveza pero no helado y el resto se deja al* ***"gusto del consumidor"****; en* $\boxed{2}$ *debe comer pescado, cerveza y prescindir del helado y en* $\boxed{3}$ *toma cerveza pero no pescado. ¡Menudo amante del lúpulo!* ***¿Será éste su secreto?***

1.3. Enunciados

Puesto que las creencias son inmateriales, intangibles, nos hemos ocupado de su expresión mediante el lenguaje, y mejor aún, como las palabras se las lleva el viento, mediante el lenguaje escrito. Los enunciados que sirven para expresar creencias son los que son susceptibles de ser verdaderos o falsos, aunque no sepamos en un momento dado su valor de verdad.

Por ejemplo, el enunciado

"Pernambuco es un estado de Brasil, cuya capital fue Olinda"

es un enunciado de creencia, que es verdadero en el mundo real, aunque algunos tal vez no lo sepan. Se comprueba consultando una enciclopedia. Sin embargo, lo que lo hace apropiado para expresar creencias es su modalidad enunciativa.

El siguiente enunciado

"Todo entero par mayor que dos es igual a la suma de dos primos"

expresa una creencia, ¡es la famosa conjetura de Goldbach! Pero aunque ha de ser verdadero o falso, no sabemos exactamente cual de los dos valores adoptará si finalmente alguien consigue demostrar el enunciado o su negación. Se trata de un enunciado, aunque quizá nunca descubramos su valor de verdad[3].

Para nosotros lo importante es que sea un enunciado capaz de expresar una creencia.

[3] Tal vez hagamos como el protagonista de *El tío Petrus y la conjetura de Goldbach*: consolarnos pensando que hemos tenido mala suerte y hemos dado con una de esas verdades indemostrables sobre las que Gödel nos había prevenido.

Es de todos sabido que la relación entre pensamiento y lenguaje plantea muchos problemas, incluso cuando dejamos de lado cuestiones fundamentales tales como la hipótesis del *determinismo lingüístico*[4].

1. En primer lugar, hay enunciados, tales como las preguntas, las órdenes, las exclamaciones o las dudas, que no expresan creencias. Estos enunciados no los emplearemos. Por consiguiente, nos limitaremos al *uso aseverativo* —declarativo o enunciativo— del lenguaje.

2. Por otra parte, un enunciado puede tener más de un significado; la lengua natural está plagada de *ambigüedades léxicas, estructurales, de referencias cruzadas*, etc. No deseamos —ni podríamos— cambiar el lenguaje natural, pues gracias a estas propiedades el lenguaje natural es flexible, con él se puede desde contar chistes hasta hacer *filosofía de la tecnología*. Sin embargo, en lógica necesitamos un lenguaje riguroso, preciso, y habrá que solventar estos problemas creando un lenguaje artificial.

3. Los enunciados precisan ser contextualizados y así el mismo enunciado puede expresar distintas creencias al recibir *distintas contextualizaciones*.

4. En ocasiones no está claro qué pensamiento o creencia expresa una determinada oración; hay *expresiones engañosas*, incluso deliberadamente engañosas.

5. Hay enunciados paradójicos, contradictorios, a los que no puede asignárseles ni el valor verdadero ni el falso. El más antiguo que se conoce es la paradoja de Epiménides el cretense, quien decía que todos los cretenses son mentirosos y que todas sus afirmaciones son mentiras.

Comentario 13 *Introduciremos un lenguaje formal para eludir los problemas de ambigüedad e imprecisiones diversas que caracterizan a la lengua natural. En este lenguaje formal las paradojas serán evitadas; veremos que distinguiendo, como haremos, entre* **lenguaje** *y* **metalenguaje** *muchas de ellas no pueden reproducirse.*

Ejemplo 14 *Con frecuencia los chistes ocurren porque la frase contiene ambigüedades: léxicas, estructurales, de referencias cruzadas; así ocurre en los siguientes casos:*

1. *Si nos encuentran, estamos perdidos. (Groucho)*
2. *En una panadería:* ***"Por favor, una barra de pan, y si tiene huevos, una docena"****. (Sale con 12 barras de pan)*

Ejemplo 15 *En la mayor parte de las paradojas hay un problema de autorreferencia*[5].

[4] Que en el caso que nos ocupa se plantearía si no fue determinante la estructura de las lenguas europeas para el diseño final del lenguaje lógico.
[5] Un tratamiento más detallado de algunas paradojas se encuentra en el CD que acompaña este libro, tanto en los ejercicios de este capítulo primero como en el de *Acertijos fantásticos*.

1. *¿Qué sucede con los enunciados del recuadro?*

Barcelona está en China
3+2=7
Hay tres errores en este recuadro

2. *Sócrates, en Troya, dice: "Lo que está ahora diciendo Platón en Atenas es falso". Platón en Atenas dice: "Lo que está ahora diciendo Sócrates en Troya es falso".*
   ¿Son consistentes los dos enunciados?

3. *Protágoras, maestro de abogados, hizo firmar a sus alumnos el siguiente contrato: "Pagaré por mis clases a Protágoras si y sólo si gano mi primer caso".*
   ¿Favorece a Protágoras o al alumno semejante contrato?

1.3.1. Tipos de enunciados

Los enunciados que expresan creencias pueden ser *consistentes* cuando la creencia expresada lo es; es decir, cuando es verdadera en alguna situación. En el lenguaje formal que se introducirá después la palabra técnica empleada es *satisfacible* para la propiedad semántica, y *consistente* para la sintáctica de imposibilidad de derivarse una contradicción; evidentemente la una es la contrapartida de la otra.

Por otra parte, un enunciado que no es verdadero en ninguna situación es *contradictorio*. Los enunciados que son verdaderos en cualquier situación son *tautologías* y los que son verdaderos en algunas situaciones y falsos en otras son *contingentes*.

Los enunciados capaces de describir una situación, y de distinguirla de otras, son contingentes. De esta clase son los enunciados que describen nuestra experiencia, que conforman la mayoría de las ciencias. Las tautologías, al ser verdaderas en toda situación, no pueden describir a ninguna en particular.

¿Describen algo?

La respuesta es que sí, que *describen a la propia lógica*. Veremos que esta idea puede ser convenientemente explotada, ya que captar el funcionamiento y naturaleza de las tautologías es captar la esencia de la lógica[6].

Comentario 16 *Esta tipología se reproduce en el lenguaje formal y tendremos fórmulas* ***satisfacibles, contingentes, contradicciones*** *y* ***tautologías.***

1.3.2. Lenguaje formal

Para obtener el rigor y precisión deseados, se introduce un *lenguaje formal (lógico)*. Se tratará de un lenguaje artificial, con una reglas gramaticales explícitas que nos dicen qué sucesiones de signos del alfabeto son fórmulas, y unas

[6] Se explica convenientemente en la sección 3.5.

reglas semánticas también explícitas que determinan cuando una fórmula es verdadera bajo una determinada interpretación —en un modelo matemático—. Dependiendo del nivel de abstracción que vayamos a necesitar, de la realidad a tratar y de la naturaleza de dicha realidad en estudio, hay diversos lenguajes posibles.

En el siguiente capítulo introduciremos el lenguaje de la lógica proposicional, que tendrá las letras $p, q, r, \ldots$ etc. como letras proposicionales; los signos $\perp, \top$ como constantes proposicionales y $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ y $\leftrightarrow$ como conectores. Las fórmulas del lenguaje formal se construyen siguiendo unas sencillas reglas de formación —en la sección 2.2.

Lenguaje y metalenguaje

En el lenguaje natural utilizamos una serie de recursos para establecer niveles de uso del lenguaje y está claro cuando hablamos del mundo o del lenguaje empleado para hablar de él. La situación se plantea cuando hablamos *de* un lenguaje *en* otro lenguaje; en especial, para distinguir el lenguaje *del* que se habla —lenguaje *objeto*— del lenguaje *en* el que se habla —*metalenguaje*.

Ejemplo 17 *Estos son ejemplos del libro de Deaño [7]:*

1. *‹"'Un famoso poeta es menos inventor que descubridor', dijo Averroes", escribe Jorge Luis Borges›, destaca Deaño.*

2. *‹Dice Hipólito en su obra* **Refutatio omnium haereseum**: *"la frase 'el bien y el mal son uno' fue escrita por Heráclito"›, asegura Deaño.*

Y también las comillas nos sirven para indicar cuando usamos o mencionamos una palabra; esto es, cuando nos referimos a un objeto extralingüístico o a la palabra misma.

Ejemplo 18 ***Uso y mención***

1. *Ponemos comillas para distinguir uso y mención.*
   Salamanca está bañada por el Tormes.
   "Salamanca" tiene nueve letras.

2. *Aquí, sin comillas, no se entiende nada:*
   Madrid empieza por m,
   termina con t
   pero generalmente se escribe con g.

3. *¿Sabes cómo hacer para que un lápiz de mina negra escriba rojo y azul?*
   Escribo: "rojo" y "azul".

El lenguaje formal será nuestro lenguaje objeto y el metalenguaje será el castellano. En este último expresaremos propiedades del primero.

Ejemplo 19 *Las fórmulas*

$$p \vee \neg p \qquad p \rightarrow q \qquad (q \rightarrow \neg q) \wedge q$$

pertenecen al lenguaje objeto. En el metalenguaje indicamos que la primera es una tautología, la segunda una fórmula contingente y la tercera una contradicción. Podemos introducir signos en el metalenguaje para expresar propiedades de esta índole, pero no serán signos del lenguaje objeto, sino abreviaturas del metalenguaje. Esto quiere decir que no intervienen en la formación de fórmulas. Así la expresión

$$\models p \vee \neg p$$

no es una fórmula del lenguaje objeto, sino un enunciado metalingüístico que dice abreviadamente

$$p \vee \neg p \text{ es una tautología}$$

Paradojas

Volvamos a la paradoja del mentiroso. La contradicción aparece cuando uno se pregunta sobre la propia afirmación de Epiménides.

¿Es también esta afirmación una mentira?

Una forma fácil de comprobarlo es la siguiente:

Sea p el enunciado: *"Estoy mintiendo"*. Naturalmente, esto es lo mismo que decir: *"No es verdad p"*, que podríamos formalizar así: $\neg Verdad(p)$. Es decir,

$$p := \neg Verdad(p) \tag{1.1}$$

Pero la propiedad semántica de verdad debería ser definida de forma que para cualquier x,

$$x \text{ es verdadera si y sólo si } x$$

es decir,

$$\forall x(Verdad(x) \leftrightarrow x)$$

¿Qué sucede cuando consideramos la propia fórmula p*?*

En primer lugar,

$$Verdad(p) \leftrightarrow p \tag{1.2}$$

Ahora podemos usar las fórmulas (1.1) y (1.2), reemplazar en (1.2) la fórmula p por su formalización, obteniendo:

$$Verdad(p) \leftrightarrow \neg Verdad(p)$$

Naturalmente, esto es una contradicción.

Conclusión 20 *Nosotros distinguiremos entre* ***lenguaje*** *y* ***metalenguaje****; la fórmula* $\forall x(Verdad(x) \leftrightarrow x)$ *con el significado que se pretende que tenga no puede ser una fórmula del lenguaje objeto. La verdad de un enunciado se expresa en el metalenguaje, nunca en el lenguaje objeto*[7].

1.4. Consecuencia lógica

Dijimos que se podía caracterizar a la lógica como el estudio de los conjuntos consistentes de creencias, tanto como el estudio de los razonamientos —o *argumentos*— válidos o correctos. Un argumento es un conjunto de sentencias tales que una de ellas —la *conclusión*— se sigue del resto —las *premisas* o hipótesis— . Lo típico es decir que la misión de la lógica es analizar los conceptos generales, patrones y procedimientos que se usan en los argumentos válidos, y que éstos son, hasta cierto punto, independientes de los razonamientos concretos —puesto que aceptamos que hay infinitos razonamientos correctos que siguen el mismo esquema lógico.

¿Qué intuición queremos captar con este concepto?, ¿cómo lo distinguimos de otros conceptos próximos?

Habría que distinguir entre:

1. El proceso de la prueba, la argumentación
2. El resultado final, el argumento

El concepto intuitivo, que tendremos que precisar, es que un razonamiento es correcto cuando no se puede imaginar ninguna situación en la que las hipótesis del razonamiento sean verdaderas y la conclusión sea falsa; esto es, cuando el conjunto formado por las hipótesis y la negación de la conclusión es insatisfacible, inconsistente. De esta manera no se modeliza el concepto dinámico de prueba, sino el estático de resultado. Sin embargo, se complementa con un cálculo deductivo, que capta mejor el concepto de transformación, de ejecución.

Llamamos relación de consecuencia a la que existe entre la hipótesis y la conclusión de un razonamiento correcto.

Una forma sencilla de verlo es utilizar traducciones del lenguaje natural al formal y, desde éste, retrotraducciones al lenguaje natural. La idea es que si traducimos al lenguaje formal un razonamiento correcto y obtenemos un conjunto de hipótesis Γ una conclusión A —abreviadamente $\Gamma \models A$— no importa cómo retrotraduzcamos Γ y A al español; el resultado será siempre un razonamiento correcto. Esto es, $p \wedge q \models p$ signifiquen lo que signifiquen p y q. Vamos a verlo con algunos ejemplos:

[7] Esto no deja de ser una *verdad* a medias, pues en la lógica modal formalizamos el metalenguaje y en lógica de la reflexión también permitimos la autorreferencia. Pero la verdad de estas nuevas fórmulas se establece desde un nuevo nivel metalingüístico, o se crean mecanismos para evitar paradojas.

En nuestro caso podríamos distinguir entre el enunciado y la proposición.

Ejemplo 21 ***Picasso***

Considerad el siguiente argumento (falaz):

- *Si Picasso nació en Málaga (p), entonces no es cierto que naciera en Francia ($\neg q$).*
- *Picasso no nació en Francia.*

  LUEGO
- *Picasso nació en Málaga.*

En este argumento todas las sentencias, tanto las de las hipótesis como la conclusión, son verdaderas, conforme a los hechos; Picasso nació en Málaga y Málaga está en España (que no es Francia, para nada). Pero el argumento no parece correcto.

Ejemplo 22 ***Retrotraducción***

Si el esquema lógico anterior fuera correcto; esto es, si

$$\{(p \rightarrow \neg q), \neg q\} \vDash p$$

obtendríamos otro argumento correcto retrotraduciendo al español p y q. Usemos la siguiente:

- *Si Picasso nació en Londres (p), entonces no es cierto que naciera en Francia.($\neg q$)*
- *Picasso no nació en Francia.*

  LUEGO
- *Picasso nació en Londres.*

  ¿Está claro por qué dudábamos del esquema argumental seguido?

Ejemplo 23 ***La oscuridad de la noche: Una prueba de la Teoría del Big Bang*** [8]

El gran descubrimiento de este siglo es que el universo no es inmóvil ni eterno, como supuso la mayoría de los científicos del pasado. El universo tiene una historia, no ha cesado de evolucionar, enrareciéndose, enfriándose, estructurándose. Esta evolución sucede desde un pasado distante que se sitúa, según las estimaciones, hace diez o quince mil millones de años, cuando el universo está completamente desorganizado, no posee galaxias, ni estrellas, ni moléculas, ni tan siquiera núcleos de átomos... Es lo que se ha llamado el BIG BANG. Una de las pruebas indirectas de esta teoría se puede plantear así:

[8] Este ejemplo está sacado del libro: *La historia más bella del mundo.* Hubert Reeves y otros. Anagrama: 1997.

- *Si **las estrellas fueran eternas** (p), entonces **la cantidad de luz emitida sería infinita** (q).*
- *Si la cantidad de luz emitida fuera infinita, entonces **el cielo debería ser extremadamente luminoso** (r).*
- *El cielo es oscuro.*

  LUEGO
- *Las estrellas no existieron siempre.*

Las sentencias anteriores las formalizamos así:

$$(p \rightarrow q) \qquad (q \rightarrow r) \qquad \neg r \qquad \neg p$$

Para expresar que la última es una consecuencia de las otras tres escribimos:

$$\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), \neg r\} \vDash \neg p$$

Comentario 24 *En este caso el esquema argumental no levanta sospechas, otra cosa es si aceptáis como verdaderas en el mundo real las hipótesis. Obviamente, el determinarlo no es misión de la lógica. En el presente ejemplo lo sería de la Cosmología.*

Si el esquema anterior corresponde a un razonamiento correcto; es decir, si

$$\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), \neg r\} \vDash \neg p$$

lo seguirá siendo cuando retrotraduzcamos al castellano p, q y r. Vamos a verlo con otro ejemplo.

Ejemplo 25 ***Lucrecio, filósofo romano; siglo I antes de Cristo.***

Lucrecio afirmaba que el universo aún estaba en su juventud. Razonó así: He comprobado desde mi infancia, se dijo, que las técnicas se han ido perfeccionando. Han mejorado el velamen de nuestros barcos, inventado armas más y más eficaces, fabricado instrumentos musicales más refinados... ¡Si el universo fuera eterno, todos estos progresos habrían tenido tiempo de realizarse cien, mil, un millón de veces!

- *Si el **universo fuera eterno** (p), entonces **todos los progresos se habrían realizado ya** (q).*
- *Si todos los progresos se hubieran producido ya, **el mundo estaría acabado, no cambiaría** (r).*
- *El mundo cambia.*

  LUEGO
- *El mundo no existe desde siempre.*

Comentario 26 *En este caso el esquema argumental es el mismo, incluso es similar el tema. La lógica nos garantiza que este esquema, al corresponder a un razonamiento válido, seguirá produciéndolos al retrotraducir p, q y r, y ni siquiera tienen que guardar relación con el tema del argumento original. Esto es, si aceptamos las hipótesis como creencias, debemos aceptar la conclusión. En una prueba mediante tableaux lo que hacemos es comprobar la imposibilidad de que se den simultáneamente las hipótesis y la negación de la conclusión. Esto es, comprobamos la incompatibilidad* [9] *de*

$$\{(p \to q), (q \to r), \neg r, \neg\neg p\}$$

Razonamiento concluyente

En la vida cotidiana nuestros razonamientos versan, frecuentemente, sobre hechos: partimos de unas premisas o hipótesis, que pueden ser verdaderas o falsas, y llegamos a una conclusión, que también puede ser verdadera o falsa. Esto es, a diferencia del lógico no estamos aparentemente interesados en todas las realizaciones o modelos de las hipótesis de nuestros razonamientos, sino solamente en lo que acaece en la realidad, en un solo modelo, o en una colección limitada de modelos. Esto enmascara tanto los razonamientos válidos con hipótesis falsas como los razonamientos incorrectos con hipótesis y conclusiones verdaderas. Para situar el problema resulta útil la siguiente tabla de doble entrada:

Tipología de razonamientos correctos, clasificados por los valores de verdad de sus hipótesis y conclusión en la realidad

		Conclusión	
		Verdadera	Falsa
Hipótesis	Verdadera	1	$\boxed{2}$
	Falsa	3	4

Tipología de razonamientos incorrectos, clasificados por los valores de verdad de sus hipótesis y conclusión en la realidad

		Conclusión	
		Verdadera	Falsa
Hipótesis	Verdadera	5	6
	Falsa	7	8

Ejemplo 27 *"¿Estás proponiendo que guardemos el dinero en casa?", preguntó ella, y luego, sin darle tiempo a contestar, le llamó puritano. Entonces Carlos la abrazó rogándole que lo olvidara. Porque en la palabra "puritano" se condensaba un argumento que él ya conocía: "Para querer hay que mancharse. Los puritanos no se manchan. Luego, tú no me quieres". Era lo que Carlos llamaba el Silogismo*

[9] El cálculo de tableaux para la lógica proposicional se define con precisión en la sección 4.2.10.

del reproche[10].

Reformulemos levemente el argumento para explicitar sus extremos:

Carlos es un puritano.
Para querer hay que mancharse.
Los puritanos no se manchan.
Luego,
Carlos no ama a Ana.

Comentario 28 *Se trata de un razonamiento correcto de hipótesis falsas y conclusión verdadera en el microcosmos planteado por la novela.*

Ejemplo 29 *Este razonamiento no sólo es válido (o correcto), sino también concluyente.*

Treinta días tiene noviembre con abril, junio y septiembre. Veintiocho tiene uno y los demás treinta y uno.
Por lo tanto,
abril tiene treinta días si y sólo si no los tiene mayo, y si mayo los tuviera, también los tendría noviembre.

El común de los mortales está interesado mayormente en los razonamientos de tipo 1, que son válidos pero además sus hipótesis son verdaderas, los llamamos *razonamientos concluyentes*. La racionalidad que como humanos se nos supone nos obliga, en principio, a aceptar las conclusiones de estos razonamientos entre nuestras creencias. Por supuesto, para adquirir nuevas creencias precisamos aceptar las conclusiones de los razonamientos cuyas hipótesis aceptamos como creencias; sin embargo, el contrastar dichas hipótesis cae fuera del alcance de la lógica.

¿Hay algo que la lógica pueda hacer al respecto?

Razonamientos válidos con hipótesis compatibles

En lógica nos interesamos por los razonamientos válidos y éstos pueden ser del tipo 1, 3 y 4. Razonamientos de tipo 2 no hay, porque justamente lo que caracteriza a un razonamiento válido es la imposibilidad de que su conclusión sea falsa cuando sus hipótesis son verdaderas. No se trata tanto de que la conclusión sea verdad sino de que el paso entre premisa y conclusión esté justificado.

Sin embargo, aun cuando desde el punto de vista lógico admitamos como válidos algunos razonamientos, nuestra aceptación de las conclusiones de un razonamiento no será la misma si sabemos que las hipótesis son incompatibles. De hecho, nos cuidaremos muy mucho de aceptar entre nuestras creencias un conjunto de hipótesis tal, pues sabemos que de él se sigue como consecuencia lógica todo enunciado, que a su vez tendrá que ser admitido también[11].

[10] Belén Gopegui, 1998: *La conquista del aire.*

[11] Como se demuestra en el ejemplo 86.

Así que siempre que sea posible verificaremos la compatibilidad de nuestras hipótesis[12]; y aunque tal vez no esté en nuestra mano establecer su verdad en el mundo real, al menos sabremos si son consistentes.

Revisión de creencias

Hemos dicho que el principio general de racionalidad nos obliga a aceptar entre nuestras creencias a todas las conclusiones obtenidas mediante razonamientos concluyentes, a todas las consecuencias de nuestras creencias. Se supone que éstas han sido admitidas tras un proceso de evaluación racional. Sin embargo, hay conclusiones que por su inverosimilitud nos hacen revisar nuestras creencias. En los sistemas expertos se suelen implementar mecanismos para el *mantenimiento de la verdad* diciéndose que la lógica usada es *no monotónica* porque al aumentar las hipótesis disminuyen, en vez de aumentar, las conclusiones. Es una forma de hablar, las hipótesis se reducen como resultado de la revisión de creencias y de ahí que también lo hagan las consecuencias.

Falacias

Los razonamientos incorrectos los descartamos; no garantizan la verdad de la conclusión, ni siquiera cuando sabemos que las hipótesis son verdaderas. Algunos razonamientos falaces pueden extraerse de la nutrida colección clásica: *Ad Baculum* (apelar a la fuerza), *ad hominem* (contra la persona), *ad populum* (usando en su favor los prejuicios del grupo), *ad verecundiam* (recurriendo al principio de autoridad), *petitio principii* (en círculo), *ignoratio elenchii* (cambiar de tema), etc.

Ejemplo 30 Ignoratio elenchii
"Salamanca es una ciudad muy provinciana."
"No, no es cierto. Salamanca tiene monumentos preciosos y tiene mucha marcha por las noches."

Comentario 31 *Aunque se pueda recurrir a los clásicos como fuente de ejemplos interesantes, no defiendo un planteamiento de* **lógica informal** *—se suelen limitar a presentar un catálogo de falacias— en un primer acercamiento a la disciplina, sino un planteamiento riguroso, pero con ejemplos bien preparados, interesantes, o al menos divertidos.*

¿Lo hemos conseguido?

[12] Puede ser inmediato si están expresadas en lógica proposicional, pero tal vez no sea factible en otros casos. Cuanto más potente es la teoría, más complicado es establecer su consistencia; por ejemplo, la consistencia de la *teoría de conjuntos* no está demostrada. Para demostrarla necesitaríamos un marco extraordinariamente potente cuya consistencia sería aún más difícil de probar.

Cómo encontrar soluciones "razonables"

Con frecuencia la situación que se nos plantea no es tanto la de comprobar si un enunciado se sigue de un conjunto de hipótesis, sino más bien la siguiente: dado un conjunto de hipótesis, queremos extraer conclusiones. En el caso de la lógica proposicional el árbol de las hipótesis nos ayuda a encontrarla. De hecho, para que sea más convincente, lo que hacemos primero es comprobar la compatibilidad de las hipótesis —pues en caso contrario cualquier conclusión es derivable—, para luego usar las ramas abiertas y establecer las coincidencias —se explica con mayor detalle en la página 86—. Por supuesto, para que el conjunto de conclusiones tenga un tamaño manejable[13] sólo nos interesamos por las fórmulas atómicas y sus negaciones. Hay muchos ejemplos en el CD, en los *espeluznantes* archivos de *MAFIA*.

Ejemplo 32 ***Robo de archivos***[14]
Al llegar el Padrino a su despacho notó que alguien había entrado en él, ¡incluso había revuelto sus archivos! Pudo comprobar que faltaban algunos documentos comprometedores.
La investigación del caso arroja estos datos:

$A :=$ *Nadie más que* P, Q *y* R *están bajo sospecha y al menos uno es traidor.*
$B :=$ P *nunca trabaja sin llevar al menos un cómplice.*
$C :=$ R *es leal.*

1. *Formaliza los enunciados anteriores usando las claves siguientes:* p, q *y* r, *que significan, respectivamente,* P *es un traidor,* Q *es un traidor y* R *es un traidor.*
2. *Comprueba si los datos son compatibles.*
3. *Extrae consecuencias de los datos y demuestra que son válidas.*

1.5. Nuestro "plan"

Hacer lógica formal a partir de un planteamiento intuitivo e informal significa ir soltando lastre. Se eliminarán los enunciados del castellano introduciendo un lenguaje riguroso[15], después, el concepto intuitivo de consistencia como compatibilidad de enunciados, que hace referencia a situaciones posibles, lo sustituiremos por el de satisfacibilidad[16], en donde las situaciones se reemplazan por las interpretaciones, matemáticamente definidas. A continuación se abandonará el concepto intuitivo de consecuencia y se definirá matemáticamente, en términos

[13] Este conjunto es de hecho infinito, como puede demostrarse fácilmente, pues si A es una conclusión, también lo son: $A \wedge A$, $(A \wedge A) \wedge A$, $((A \wedge A) \wedge A) \wedge A$, etc.
[14] La solución está en el capítulo de tableaux semánticos, es el ejemplo 113.
[15] En el capítulo 2, en la página 30.
[16] Véase la sección 3.3.