INTRODUCCIÓN A LA PARTE I: LÓGICA

por MARIO GÓMEZ TORRENTE

La lógica de Frege es sin lugar a dudas la parte de su obra de mayor trascendencia. Si bien la importancia del trabajo de Frege para la filosofía del lenguaje y los fundamentos de la matemática es colosal, su obra lógica se distingue por contener contribuciones universalmente aceptadas y universalmente consideradas como las más trascendentes para la disciplina en toda su historia —sólo la obra de Aristóteles se menciona ocasionalmente como una obra de valor comparable—. Estas aportaciones incluyen, entre otras, la introducción de la formalización de las oraciones en términos exclusivamente de funciones y argumentos en lugar de las categorías de la gramática tradicional, la formalización de la cuantificación como una función de una función, que permite una representación útil y perspicua de cuantificaciones múltiples en el alcance unas de otras, y la creación del primer cálculo deductivo puramente sintáctico. En la primera sección de esta introducción describiremos brevemente algunas de esas aportaciones, al hilo de una narrativa plausible sobre su génesis. Michael Dummett, el gran estudioso de Frege, ha dicho que la *Conceptografía*, el librito que Frege publicó en 1879 a los 31 años de edad y en el que aparecen por primera vez todas esas contribuciones, "parece haber nacido del cerebro de Frege sin fertilización de influencias externas" (Dummett 1981, p. xxxv) y probablemente tiene razón, pero no es menos cierto que hay una dinámica interna en las motivaciones y consideraciones de Frege que permite explicar al menos en cierta medida, aunque quizás sin excesivo detalle, el surgimiento de sus ideas, e intentaremos explicitar esa dinámica. En la segunda sección trataremos, de forma aún más sucinta, algunos aspectos de las ideas filosóficas que tenía

Frege acerca de la lógica —algunos aspectos de su filosofía de la lógica.

1. *La lógica de Frege*

Frege nos dice en el prólogo de su *Conceptografía* que la cuestión que dio pie a las ideas de ese trabajo fue la cuestión de si los juicios de la aritmética requieren una justificación empírica, o al menos una basada en la intuición *a priori* del espacio y el tiempo que postuló Kant, o, por el contrario, son susceptibles de una justificación "puramente lógica", una que evite apelar a "la particularidad de las cosas" y que sea no empírica en un sentido muy estricto, que excluya el tipo kantiano de justificación para los juicios aritméticos. Frege parece haber estado convencido desde muy pronto de que la aritmética, al tener una aplicación completamente general que incluye ámbitos no empíricos, debería ser susceptible de una justificación mucho más pura, o "lógica", que la que propuso Kant: la segunda opción, lo que después se llamaría la opción "logicista", debería ser la correcta. Pero también desde el principio Frege tuvo claro que la tarea de mostrar esto sería ardua y requeriría la introducción de nuevas herramientas conceptuales. Algunas de estas herramientas acabarían siendo las cruciales aportaciones de Frege a la lógica que ya hemos mencionado.

Frege dice que el punto de partida de su tarea logicista fue la búsqueda de un análisis de la noción de serie ordenada en términos de "consecuencia lógica". Probablemente la idea de generación de la serie de los números y la de transmisión de una propiedad en esa serie evocan con fuerza la impresión de que la aritmética se fundamenta en algún tipo de intuición espacio-temporal. El producto final del análisis de Frege de la noción de serie ordenada es probablemente lo que hoy podemos leer en el capítulo III de su *Conceptografía,* en el que se muestra fundamentalmente cómo expresar y demostrar principios de inducción abstractos para series ordenadas utilizando sólo lo que hoy conocemos como lógica de segundo orden. Pero aunque las ideas básicas de ese análisis probablemente rondaron la mente de Frege desde muy pronto, el desarrollo preciso del producto final requirió la introducción de otras ideas.

En primer lugar, como el mismo Frege señala, la naturaleza misma de su proyecto requería, a fin de evitar posibles objeciones de filósofos con posturas empiristas o kantianas acerca de los juicios aritméticos, que quedara escrupulosamente claro que las demostraciones de esos juicios que el logicista realizase no apelarían en ningún momento de alguna forma velada a juicios empíricos o dependientes de una intuición general del espacio y el tiempo. Este requisito evidente es lo que lleva a Frege a concebir e imponer estándares de rigor muy altos en su concepción de un cálculo deductivo para la lógica, y en particular lo que lo conduce a su concepción del cálculo de la *Conceptografía* como un sistema de axiomas y reglas perfectamente especificadas que agotan completamente el ámbito de proposiciones y procedimientos de los que es posible servirse en las demostraciones lógicas. La idea de un axioma o regla puramente formales, o sea de un axioma o regla dados como esquemas o cuantificaciones universales y que se entienden de manera tal que especifican el ámbito de proposiciones e inferencias obtenibles por sustitución o particularización a partir de esos esquemas o cuantificaciones, no es desde luego una idea de Frege, sino una idea que aparece desde muy pronto en la tradición lógica. Pero Frege naturalmente la utiliza, y le añade su concepción de la demostración como un proceso de derivación en el que únicamente es posible servirse de un conjunto perfectamente especificado de axiomas y reglas formales.

De todos modos, a Frege sin duda le pareció que esa concepción tan rigurosa de los procedimientos formales de derivación no excluía de por sí otras maneras en que las demostraciones que él buscaba pudiesen verse como dependientes de supuestos no lógicos. Frege escribe en multitud de lugares que encontró una grave dificultad para su proyecto en el hecho de que la expresión en el lenguaje natural de los juicios y demostraciones que necesitaba alcanzaba fácilmente una complejidad gramatical extrema. Además, Frege menciona repetidamente, como una motivación importante para su *Conceptografía*, la existencia de ambigüedades léxicas y sintácticas en el lenguaje natural —la que destaca como más peligrosa (en su "Sobre la justificación científica de una conceptografía", de 1882) es la existencia de palabras que pueden funcionar con categorías gramaticales distintas y, por consiguiente, con significados distintos. Un ejemplo significativo son los numerales, que pueden funcionar al menos como nombres ("Cinco es el número de estudiantes de esta clase"), como predicados de nombres (plurales) ("Alfonso, Brígida, Carlota, Doroteo y Enriqueta son cinco") y como predicados de predicados ("Hay cinco estudiantes aquí").[1] Esta complejidad y ambigüedad podía permitir la aparición de confusiones y, en particular, facilitar acusaciones de dependencia velada de supuestos no lógicos basadas en esas confusiones (en casos en los que los principios usados por Frege pudieran aparecer como no lógicos en alguna acepción de los términos ambiguos).

Para enfrentarse a estos problemas, Frege se inspiró en el lenguaje de fórmulas de la aritmética misma, cuya gramática es muy simple en comparación con la del lenguaje natural, y donde cada tipo de símbolo va asociado a un rol sintáctico único. En particular, en esas fórmulas sólo aparecen numerales (en su rol de nombres) y variables, símbolos para funciones aritméti-

[1] Frege nos dirá años después (en el prefacio al volumen I de *Las leyes fundamentales de la aritmética* (Frege 1893)) que el mayor de sus logros fue darse cuenta de que el análisis correcto de las "oraciones de número" (ejemplos de las cuales son "Estos son cinco árboles" y "La carroza del rey es arrastrada por cuatro caballos") las ha de ver como oraciones en las que se predica una propiedad numérica de un predicado o concepto. Frege veía también la naturaleza metafísica de los números en cuanto objetos como en último término dependiente de este tipo de predicaciones de segundo orden, y nuestro acceso epistémico a ellos como mediado también por una comprensión de ese tipo de predicaciones. En este sentido, la acepción de los numerales como predicados de predicados, o predicados de segundo orden, es la conceptualmente fundamental. Estas ideas apoyan en gran medida su visión original de los conceptos aritméticos como conceptos altamente generales que no dependen para su aplicación de un ámbito particular de objetos empíricos. Si el contenido de los numerales se piensa independientemente de su conexión con las predicaciones de segundo orden, es tentador verlo como si estuviera constituido por grupos, colecciones o montones de objetos empíricos, propiedades de objetos empíricos, símbolos perceptibles, etc. —el tipo de posturas que Frege critica de forma devastadora en *Los fundamentos de la aritmética* (Frege 1884)—. Así, no es inverosímil pensar que Frege haya visto como pernicioso para la filosofía de la aritmética y para la comprensión cabal de la naturaleza lógica de los conceptos aritméticos el hecho de que los numerales del lenguaje natural sean ambiguos.

cas, y símbolos para igualdades y desigualdades (además de paréntesis), y todas ellas son simplemente ecuaciones e inecuaciones de términos formados por composición de funciones a partir de numerales y variables. Frege adoptó resueltamente la decisión de dotar a su lenguaje para la expresión lógica de la aritmética de unas características similares. Al hacerlo concibió la idea de formalizar las oraciones que necesitaba por medio de una gramática muy simple y muy estricta, en la que cada expresión compleja bien formada surgiera de la aplicación de un símbolo "de función" a símbolos que fueran "argumentos" de esa función, una gramática en la que, en otras palabras, todo análisis sintáctico se resolviera en la operación de funciones a argumentos. De la misma forma en que en las fórmulas aritméticas el símbolo de suma se aplica a dos términos aritméticos para producir otro término, y el símbolo de igualdad se aplica a dos términos para producir una fórmula, Frege resolvió que todas las expresiones de alguna categoría gramatical que no fueran oraciones y que no fueran nombres o variables pertenecerían a categorías gramaticales "funcionales", asociadas a reglas estrictas acerca de cuáles son sus "argumentos" posibles y cuáles son los resultados posibles de su aplicación a esos argumentos. Junto con la estipulación de que cada categoría gramatical ha de tener símbolos de aspectos distintos, esta resolución tiene el efecto, familiar para los conocedores de la lógica moderna, de eliminar por completo las ambigüedades sintácticas frecuentes en el lenguaje natural, y también la consecuencia de que uno puede expresar de forma relativamente concisa con las abreviaturas típicas de los lógicos ideas que en el lenguaje natural sólo se pueden expresar por medio de construcciones gramaticales notablemente alambicadas.

La resolución de Frege tuvo también como efecto indirecto el que a menudo se considera como su logro más decisivo: el hallazgo de la formalización de la cuantificación como una función de una función. La resolución de entender toda expresión de una categoría gramatical no oracional y que no sea un nombre o una variable como un símbolo de función obliga a tomar a los cuantificadores como símbolos de función. Una vez que esto se acepta, una opción relativamente natural es tomar a un cuantificador como un símbolo que se aplica a un predicado como argumento para dar lugar a una fórmula, predicado que a su vez es natural ver como un símbolo que se aplica a un nombre para dar lugar a una fórmula. Esto lleva a la posibilidad de representar cuantificaciones múltiples en el alcance unas de otras.

Tomemos un caso simple. Si el símbolo "Alberto admira a" se aplica a nombres para producir oraciones, es un predicado; por tanto, dado el análisis mencionado de la cuantificación, digamos del cuantificador "Todos", la expresión "Todos (Alberto admira a (   ))" (donde los paréntesis acotan el lugar de una expresión a la que se aplica un símbolo de función) representa que Alberto admira a todos. Ahora bien, esta oración puede verse también como producto de la aplicación de un predicado al nombre "Alberto". Podemos representar ese predicado como "Todos$_1$ ((   ) admira a (1))", evitando una ambigüedad por medio del "1" que vincula o "liga" el cuantificador "Todos" al lugar en el que aparecerían los nombres a los que se aplicaría el predicado al que "Todos" se aplicó. Si ahora aplicamos un nuevo cuantificador a ese predicado, obtenemos una oración con varios cuantificadores unos en el alcance de otros: "Todos (Todos$_1$ ((   ) admira a (1)))" representa que todos admiran a todos; "Alguno (Todos$_1$ ((   ) admira a (1)))" representa que hay alguien que admira a todos. Además, procesos análogos llevan a la representación de oraciones con otras estructuras cuantificacionales anidadas: "Todos (Alguno$_1$ ((   ) admira a (1)))" representa que todos admiran a alguno (que no tiene por qué ser el mismo en todos los casos); "Alguno (Alguno$_1$ ((   ) admira a (1)))" representa que hay alguien que admira alguien. (Nótese que en el lenguaje natural el segundo y el tercero de estos ejemplos se representarían habitualmente por medio de una misma oración, sintácticamente ambigua: "Todos admiran a alguien".) Como vamos a ver inmediatamente, Frege diseñó una notación aún más perspicua para representar estas cuantificaciones, en la que una variable acompaña siempre al cuantificador y luego aparece en el lugar vinculado o "ligado" donde aparecerían los nombres a los que se aplicaría el predicado al que el cuantificador se aplica.

La *Conceptografía* es fundamentalmente el resultado de integrar todas estas y otras innovaciones en un todo orgánico, que aún hoy impresiona por su evidente ruptura con la tradición lógica inmediatamente anterior y por su anticipación de muchas características de la práctica lógica posterior.

En primer lugar, en la *Conceptografía* Frege diseña una notación con abreviaturas que recuerdan a las de la notación matemática. Esta notación fregeana es en esencia similar a la que actualmente se usa en los lenguajes cuantificacionales, e implementa la resolución mencionada de que todas las expresiones de alguna categoría gramatical que no sean oraciones, nombres o variables sean funcionales, así como la estipulación de que cada categoría gramatical tenga símbolos cuyos aspectos sean distintos. Frege usa letras griegas mayúsculas como letras (esquemáticas) para predicados, y letras que tienen otros aspectos para representar nombres y variables, las cuales se ubican dentro de paréntesis a continuación de los predicados que se les aplican en las fórmulas correspondientes; por ejemplo,

$$—\Phi(A), \quad —\Psi(A, B), \quad —\Theta(\mathfrak{a}).$$ [2]

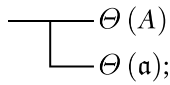
También usa símbolos especiales para la igualdad (un predicado que se aplica estrictamente a dos nombres, dos variables, o un nombre y una variable, para dar lugar a una fórmula),[3] el condicional (una función que se aplica estrictamente a dos fórmulas para dar lugar a una fórmula), el negador (una función que se aplica estrictamente a una fórmula para dar lugar a una fórmula), y el cuantificador universal (una función que se aplica estrictamente a un predicado (con respecto a una variable) para dar lugar a una fórmula). Así, la identidad entre "A" y "B" (hoy simbolizada "$A = B$") se simboliza

$$—A \equiv B;$$

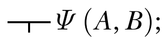
[2] El trazo horizontal ("—") que precede a las fórmulas en la notación de Frege (con variantes en el caso de las negaciones y cuantificaciones; véase más abajo) indica que las fórmulas poseen un contenido susceptible de ser juzgado (aceptado cuando es considerado por la mente) o afirmado. Cuando ese trazo va a su vez precedido de un trazo vertical ("$\vdash$"), el contenido en cuestión está siendo de hecho juzgado o afirmado.

[3] En la *Conceptografía* Frege no usa lo que hoy conocemos como functores, por tanto tampoco usa términos construidos con su ayuda. Suple el uso de functores, como a veces se hace hoy en día también, por medio de símbolos para relaciones.

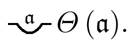
la condicionalización con "$\Theta\,(\mathfrak{a})$" como antecedente y "$\Theta\,(A)$" como consecuente (hoy habitualmente simbolizada "$\Theta\,(\mathfrak{a}) \supset \Theta\,(A)$") se simboliza



la negación de "$\Psi\,(A, B)$" (hoy habitualmente simbolizada "$\sim \Psi\,(A, B)$") se simboliza



y la cuantificación universal de "$\Theta\,(\mathfrak{a})$" con respecto a la variable "$\mathfrak{a}$" (hoy habitualmente simbolizada "$(\forall\, \mathfrak{a})\, \Theta\,(\mathfrak{a})$") se simboliza

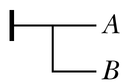


El resultado es una variante notacional de los lenguajes cuantificacionales con los que el estudiante de lógica se familiariza desde un principio hoy en día. Con esta notación es posible representar de maneras hoy bien sabidas la conjunción (hoy habitualmente simbolizada por medio del signo "&"), la disyunción (hoy habitualmente simbolizada por medio del signo "$\vee$") y el cuantificador particular (hoy habitualmente llamado cuantificador existencial y simbolizado por medio del signo "$\exists$").

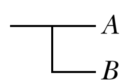
La semántica que Frege atribuye a estas notaciones en su *Conceptografía* es también en esencia similar a la que hoy en día se estipula para los lenguajes cuantificacionales de la lógica clásica, aunque con algunas diferencias, debidas quizás sobre todo a la naturaleza naciente de las ideas semánticas de Frege en 1879. Hay que observar, en primer lugar, que hay una cierta falta de claridad acerca de cuál es el contenido de los símbolos de predicado, que se resolverá sólo en la obra posterior de Frege; un indicio (aunque meramente un indicio) de esa falta de claridad es que Frege se refiere invariablemente a expresiones cuando habla de funciones y argumentos (uso en el que le hemos seguido en parte); en su obra posterior reservará estrictamente el nombre "función" para (una parte de) el contenido (extralingüístico) de las expresiones funcionales en cuanto funcionales, y el nombre "argumento" para (una parte de) el contenido (extralingüístico) de las expresiones de argumento (en cuanto expresiones de argumento).

La interpretación del símbolo de igualdad, por otro lado, es definitivamente diferente de la actual y de la que adoptará en la obra posterior de Frege: en la *Conceptografía*, "—— $A \equiv B$" simboliza el contenido "metalingüístico" de que los símbolos "A" y "B" están por la misma cosa, mientras que hoy en día se entiende que un enunciado de igualdad "$A = B$" simboliza que cierto par de objetos son idénticos, pero no que esos objetos son denotados por "A" y "B".[4]

La interpretación del condicional en la *Conceptografía* es quizás también algo diferente de la actual y de la del Frege posterior. Frege nos dice que si A y B denotan contenidos juzgables, hay cuatro posibilidades: (1) A es afirmado y B es afirmado; (2) A es afirmado y B es negado; (3) A es negado y B es afirmado; (4) A es negado y B es negado; y que



denota el juicio de que la tercera de estas posibilidades no se da, sino que se da una de las otras tres; así, el contenido juzgable de



parecería ser que la tercera de aquellas posibilidades no se da, sino que se da una de las otras tres, o sea un contenido acerca de afirmaciones y negaciones. Hoy en día se entiende que el contenido veritativo-condicional de un enunciado condicional $B \supset A$ es que no es el caso que B es verdadero y A falso, y esta idea es también claramente la que ofrece Frege al explicar el condicional en la sección 12 del volumen I de sus *Leyes fundamentales de la aritmética* (1893) y en su manuscrito "Introducción a la lógica" (1906). Pero esta concepción del condicional

[4] En "Sobre sentido y referencia" (1892) Frege concluirá que un enunciado de identidad verdadero tiene como un aspecto de su contenido un "sentido" que va más allá del contenido de que cierto objeto es idéntico a sí mismo, pero argumentará convincentemente que ese aspecto de su contenido no es meramente metalingüístico.

es neutral con respecto a cualquier conexión con las nociones de afirmación o negación. Así pues, parecería que en la *Conceptografía* Frege presupone una concepción algo menos neutral del condicional material, basada quizás en su concepción de la verdad, que aparentemente incluye una idea de ésta como algo afirmado en condiciones de correcta operación de ciertas reglas cognitivas, y su rechazo de cualquier noción de verdad como correspondencia (aspectos sobre los que volveré en seguida).

Por último, la concepción de la semántica del cuantificador universal en la *Conceptografía* parecería ser también metalingüística en una forma en que no lo es la concepción actual ni la que Frege sostuvo posteriormente. En la *Conceptografía* Frege dice que "$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\,\Theta\,(\mathfrak{a})$" significa el juicio de que la función "$(\Theta\,(\mathfrak{a}))$" es un hecho cualquiera que sea su argumento; pero dado que en este momento Frege claramente llama "funciones" y "argumentos" a las expresiones correspondientes, ello sugiere que su comprensión del cuantificador es "sustitucional": la verdad de "$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\,\Theta\,(\mathfrak{a})$" se entiende como la verdad de todos los resultados de sustituir "$\mathfrak{a}$" por argumentos (expresiones argumentales) posibles en la expresión "$\Theta\,(\mathfrak{a})$". La concepción actual, y también muy explícitamente la de Frege (en la sección 8 del volumen I de Frege 1893, que se apoya en la mencionada concepción extralingüística de los argumentos y de (los valores de) las funciones) es una concepción "objetual", para la cual la verdad de "$(\forall\,\mathfrak{a})\,\Theta\,(\mathfrak{a})$" consiste en la verdad de todos los resultados de asignar objetos diferentes a la variable "$\mathfrak{a}$" en "$\Theta\,(\mathfrak{a})$".

De todas maneras, con una notación y una comprensión del cuantificador fregeanas es posible formalizar de formas muy perspicuas cuantificaciones como las mencionadas antes. Así, utilizando la esencialmente similar notación actual, "Todos admiran a todos" se simboliza "$(\forall\,\mathfrak{a})(\forall\,\mathfrak{b})\ A(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$"; "hay alguien que admira a todos" se simboliza "$\sim(\forall\,\mathfrak{a})\ \sim(\forall\,\mathfrak{b})\ A\,(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$" (o "$(\exists\,\mathfrak{a})(\forall\,\mathfrak{b})\ A\,(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$"); "todos admiran a alguno (que no tiene por qué ser el mismo en todos los casos)" se simboliza "$(\forall\,\mathfrak{a})\sim(\forall\,\mathfrak{b})\ \sim A\,(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$" (o "$(\forall\,\mathfrak{a})(\exists\,\mathfrak{b})\ A\,(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$"); y "hay alguien que admira a alguien" se simboliza "$\sim(\forall\,\mathfrak{a})(\forall\,\mathfrak{b})\ \sim A\,(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$" (o "$(\exists\,\mathfrak{a})(\exists\,\mathfrak{b})\ A\,(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$").

Finalmente, en la *Conceptografía* Frege lleva a efecto su concepción de la demostración por medio de lo que de hecho constituye la primera construcción de un cálculo deductivo en cuyas derivaciones sólo es posible servirse de un conjunto especificado de axiomas y reglas formales. El cálculo de la *Conceptografía* es lo que luego se llamará un cálculo axiomático, cuyos axiomas son (en esencia y en notación actual) las cuantificaciones universales

$(\forall F)(\forall G)(F \supset (G \supset F));$ [5]

$(\forall F)(\forall G)(\forall H)((H \supset (G \supset F)) \supset ((H \supset G) \supset (H \supset F)));$

$(\forall F)(\forall G)(\forall H)((H \supset (G \supset F)) \supset (G \supset (H \supset F)));$

$(\forall F)(\forall G)((G \supset F) \supset (\sim F \supset \sim G));$

$(\forall F)(\sim\sim F \supset F);$

$(\forall F)(F \supset \sim\sim F);$

$(\forall a)(\forall b)(\forall F)(a = b \supset (F(a) \supset F(b)));$

$(\forall a)(a = a);$

$(\forall a)(\forall F)((\forall x)F(x) \supset F(a));$

y cuyas reglas de inferencia (en esencia y en notación actual) son el *modus ponens*, o sea la regla que permite derivar una fórmula G de las fórmulas $F \supset G$ y F; la regla que permite derivar una fórmula de la forma $F(a)$ de una fórmula de la forma $(\forall x)F(x)$; la regla que permite derivar una fórmula de la forma $G \supset (\forall x)F(x)$ de una fórmula de la forma $(\forall x)(G \supset F(x))$ cuando "x" no aparece en G; y reglas para la sustitución uniforme de letras y variables en proposiciones ya derivadas.[6] (El

[5] Nótese que Frege, a diferencia de lo que ocurre hoy en día, cuantifica sobre proposiciones y funciones proposicionales, o más exactamente, si su concepción de la cuantificación es sustitucional, sobre fórmulas.

[6] Aquí hay que hacer la salvedad de que en la *Conceptografía* Frege sólo confiere explícitamente el carácter de "modo de inferencia" a la regla de *modus ponens*. Pero es claramente consciente de que usa las otras reglas mencionadas; por eso Frege sólo dice que la única regla que utiliza donde se deriva una fórmula a partir de más de una fórmula es el *modus ponens*; y eso es compatible con su reconocimiento de las otras reglas, donde una fórmula se deriva a partir de otra fórmula.

cálculo que presenta en *Las leyes fundamentales de la aritmética*, que alcanza un grado de precisión y rigor sintácticos incluso superior al de la *Conceptografía*, será diferente. La parte suficiente para desarrollar lo que hoy conocemos como la lógica cuantificacional consta allí de cuatro axiomas (el segundo de los cuales tiene dos partes) y un gran número de reglas de inferencia.)[7]

2. *La filosofía de la lógica de Frege*

A diferencia de lo que ocurre con la lógica en sí, Frege no se ocupó de la filosofía de la lógica de forma sistemática. Hacernos una idea de sus opiniones filosóficas sobre la lógica requiere una labor de recopilación, que no tiene por qué prestarse tampoco a una sistematización por parte del recopilador. En esta sección mencionaré algunos aspectos de las ideas filosóficas de Frege sobre la lógica, sin ambiciones de conseguir una sistematización semejante.

Para Frege el objeto de la lógica es la noción de verdad y sus leyes. La lógica nos dice, no qué proposiciones son verdaderas, sino cómo inferir de tal manera que, si las proposiciones que consideramos verdaderas lo son en realidad, no podamos llegar a aceptar otras proposiciones salvo las que sean verdaderas. Esta idea queda clara en multitud de lugares, por ejemplo en los manuscritos póstumos "Lógica" (de 1897) y en las "17 oraciones clave sobre lógica" (probablemente de 1876–1877). Hay de todos modos una restricción que sin duda Frege tiene en mente, como se desprende de su concepción del objeto de la lógica como independiente de la "particularidad de las cosas", que ya hemos mencionado al hablar de su *Conceptografía*: la lógica no se ocupa *simpliciter* de cómo llegar a verdades a partir de verdades; no se ocupa de especificar reglas de la preservación de la verdad en el razonamiento específicas a la química, por ejemplo; las leyes de que se ocupa la lógica no mencionan objetos o conceptos "particulares", sino a lo sumo

[7] Una presentación mucho más detallada de la lógica de Frege (en particular de la *Conceptografía*), que menciona varias complicaciones omitidas aquí, y que incluye asimismo un amplio examen de su filosofía de la lógica, se puede ver en Sullivan 2004.

conceptos cuyo ámbito de aplicación es máximamente general, y objetos caracterizables en términos de esos conceptos. Como Frege dice en la "Lógica" de 1897, "la lógica es la ciencia de las leyes más generales de la verdad".

En los mismos lugares en que enuncia su concepción de la lógica como una ciencia de las leyes de la verdad en el sentido mencionado, Frege se muestra siempre extremadamente crítico con las concepciones psicologistas de la lógica. Frege insiste en que las leyes de la verdad de que se ocupa la lógica no son "leyes del pensamiento" en cuanto leyes descriptivas de la forma en que procede de hecho el razonamiento (o siquiera el razonamiento con conceptos máximamente generales) en los seres humanos, sino leyes normativas, que prescriben maneras en que podrían proceder los razonamientos sin llegar a otra cosa que verdades a partir de otras verdades. El antipsicologismo de Frege impregna no sólo su filosofía de la lógica, sino también y muy especialmente su filosofía de las matemáticas, que se opone radicalmente a cualquier reducción de las nociones matemáticas a construcciones psicológicas.

La noción de verdad que es el objeto de la lógica es concebida a su vez por Frege como una noción algo peculiar. Frege nos dice en varios lugares (por ejemplo en el manuscrito "Mis ideas lógicas básicas" de 1915) que al afirmar una proposición y al afirmar que es verdadera afirmamos exactamente lo mismo: la noción de verdad no parece en sí misma corresponder a ninguna realidad sustantiva. Frege se pregunta si eso implica que la palabra "verdadero" no tiene sentido. Su conjetura es que el sentido de la palabra "verdadero" existe, pero no contribuye en nada a conformar el sentido de las oraciones en las que aparece como predicado. En varios lugares (por ejemplo en el manuscrito "17 oraciones clave sobre lógica" y en el artículo "El pensamiento", de 1918) Frege dice también que la noción de verdad es indefinible. Y en "El pensamiento" y en la "Lógica" de 1897 sugiere un argumento a favor de esa tesis de indefinibilidad: dado que afirmar una proposición y afirmar que es verdadera es lo mismo, cualquier definición de la verdad daría pie a casos particulares, de la forma de "P es verdadero si y sólo si $A(P)$", tales que la parte definiente, de la forma de "$A(P)$", habría de consistir en una proposición que en realidad contendría la noción misma de verdad, y ofrecería por tanto sólo un intento circular de definir la verdad.

Incluso si la noción de verdad es indefinible, en el sentido de irreducible a otras, es claro en Frege, como mencionamos en la sección anterior, que posee muchas notas que se pueden observar en ella. Una de sus notas viene dada por su carácter normativo: una verdad es algo que debe aceptarse y aun afirmarse. Frege deja claro también que el que una proposición sea verdadera (o falsa) es una cuestión objetiva, que no admite respuestas diferentes en relación con diferentes sujetos o culturas. También deja claro (en “El pensamiento”) que el que una proposición sea verdadera no viene determinado por su correspondencia con otra cosa; la verdad de una proposición o pensamiento es una cuestión absoluta, mientras que la correspondencia de un pensamiento con otra cosa es una cuestión relativa; además, las correspondencias pueden ser aproximadas, mientras que la verdad de un pensamiento se da o no se da, sin grados. Una última cosa de interés que Frege dice (en “El pensamiento”) es que “el significado de la palabra ‘verdadero’ queda explicado en las leyes de la verdad”, leyes que, como sabemos, son las leyes de la lógica.

Lamentablemente, la peculiaridad de la noción de verdad no parece recibir ulterior elucidación en la obra de Frege —aunque eso sea naturalmente consistente con su propio punto de vista, que ciertamente parece implicar que no se puede decir mucho sobre la verdad—. Pero es inevitable especular sobre qué concepción o concepciones de la verdad son compatibles con las intuiciones y argumentos de Frege incluso si Frege pudiera haber rechazado tales especulaciones. El rechazo del correspondentismo, y el rechazo aún más general de la idea de que la verdad tenga una naturaleza relacional, sugieren que el fundamento metafísico de la verdad ha de radicar en algún tipo de propiedad interna de las proposiciones o pensamientos. El objetivismo de Frege sugiere además que esa propiedad consiste en alguna característica de las proposiciones que trasciende su susceptibilidad de ser pensadas en virtud de peculiaridades cognitivas de los distintos seres pensantes o culturas pensantes, es decir alguna característica que consista precisamente en su susceptibilidad de ser pensadas por todo ser pensante. Su concepción normativa de la verdad está relacionada con su objetivismo, y sugiere la idea de que hay un estrecho vínculo entre el fundamento metafísico de la verdad y su fundamento epistemológico. Es difícil evitar la impresión de que estas ideas se acercan especialmente al espíritu de la filosofía kantiana acerca de la verdad, incluso si pueden contradecirla en los detalles. Como Frege, Kant rechaza la concepción tradicional de la verdad como correspondencia, pues el ámbito de las cosas más allá de los fenómenos no es en sí susceptible de ser pensado, y ve la verdad como una propiedad que los juicios adquieren en virtud de características "internas" —en virtud de las reglas relativas a las condiciones de posibilidad del pensamiento impuestas por la estructura cognitiva del sujeto trascendental; esas características "internas" están por tanto estrechamente vinculadas a una concepción normativa, a saber, la de la operación de esas reglas. Pero debe subrayarse que la atribución a Frege de una concepción kantiana de la verdad sólo puede ser conjetural.

Hasta ahora nos hemos ocupado de cuestiones relacionadas con las ideas de Frege acerca del objeto de la lógica. Diremos algo a continuación sobre sus ideas acerca del fundamento epistémico de la lógica. De nuevo se trata de un asunto sobre el que Frege dice mucho menos de lo que desearíamos. Dice tan poco, de hecho, que no es infrecuente una opinión como la del gran historiador de la filosofía analítica Alberto Coffa, que después de referirse a la escasez de pronunciamientos de Frege sobre el asunto, dice: "La conclusión parece inevitable: el padre de la lógica moderna no tenía opiniones acerca del fundamento de la verdad lógica" (Coffa 1991, p. 124).

Hay al menos otra posibilidad interpretativa. El que alguien no se pronuncie sobre algo desde luego no quiere decir que no tenga opiniones sobre ello, pero más importante aún: *ceteris paribus*, una falta de pronunciamientos normalmente deberá verse como dando a entender que se acepta alguna postura comúnmente admitida en el medio en el que el autor se mueve o por el público al que se dirige. En el caso de Frege, no es inverosímil pensar que la escasez de pronunciamientos sobre el fundamento epistémico de la lógica se debe, simplemente, a que Frege da por supuesto una vez más que la filosofía kantiana ha proporcionado una explicación esencialmente correcta de ese tipo de fundamento.

El lugar donde Frege es más explícito acerca de sus opiniones sobre la epistemología de la lógica es *Los fundamentos de la aritmética* (Frege 1884). Ahí deja claro que tiene la intención de usar las distinciones analítico/sintético y *a priori/a posteriori* en el sentido pretendido por Kant. También deja claro que piensa que las leyes de la lógica no pueden ser sino *a priori* al ser completamente generales: bajo el supuesto de que sean efectivamente conocidas, no pueden ser sino conocidas *a priori*, pues no mencionan ninguna particularidad de las cosas, sino únicamente conceptos de aplicación totalmente general u objetos caracterizables en términos de esos conceptos. El carácter *a priori* de las verdades lógicas se puede mostrar a menudo derivándolas mediante inferencias puramente lógicas a partir de verdades lógicas "primitivas". Eso reduce la cuestión de explicar el fundamento de la lógica a la cuestión de explicar el fundamento de estas verdades primitivas y de las reglas de inferencia. Frege no dice prácticamente nada sobre esta cuestión, pero no es descabellado pensar que en este punto acepta tácitamente la concepción kantiana de la verdad de la lógica como algo requerido por la estructura cognitiva del sujeto trascendental, en este caso por las formas del juicio y las categorías puras del entendimiento (e independientemente de las formas de la intuición). Después de señalar algunos puntos en los que discrepa de Kant (en particular al señalar que la definición de Kant de los juicios analíticos como aquellos donde el concepto del predicado está contenido en el concepto del sujeto es insuficiente al haber proposiciones de otras formas que la forma sujeto-predicado), Frege subraya: "con el fin de no exponerme a la acusación de hacer críticas mezquinas a un genio al que sólo podemos contemplar con admiración agradecida, creo que debo enfatizar las coincidencias que por mucho prevalecen" (§ 89), y a continuación indica que su discrepancia fundamental de Kant se reduce a la cuestión del lugar asignado a las verdades aritméticas en la división kantiana de los juicios. Es difícil no ver aquí una aceptación tácita de la epistemología kantiana de la lógica (junto con una corrección de la concepción kantiana de la lógica en sí).

Concluiremos esta breve nota sobre la filosofía de la lógica de Frege con unas no menos breves observaciones sobre lo que podríamos llamar la cuestión de la "metalógica" de Frege. La metalógica es el estudio que toma como su objeto a la lógica, especialmente el estudio que se puede llevar a cabo usando herramientas lógicas y matemáticas. Por lo dicho hasta ahora cabría sin duda esperar que para Frege hay algún tipo de dificultad a la hora de estudiar o pensar la lógica, pues hay algún tipo de dificultad a la hora de pensar la noción de verdad, que entra de forma esencial en la caracterización de su naturaleza. Además, Frege, a diferencia de lo que es normal en las presentaciones habituales de la lógica en la actualidad, no procede ofreciendo primero una caracterización "semántica" de la extensión del ámbito de las verdades lógicas y luego su cálculo, con el objeto de "capturar" esa extensión también desde un punto de vista deductivo: Frege presenta su cálculo directamente. Éstos y otros hechos acerca de la presentación que Frege hace de su propio sistema de lógica han llevado a una distinguida escuela de comentadores[8] a proponer que Frege tenía, no sólo una concepción filosófica de la lógica diferente de la preponderante (o las preponderantes) hoy en día, sino también una concepción radicalmente diferente de los procedimientos admisibles en la metalógica. Según estos comentadores, la concepción filosófica de la lógica de Frege determinó que su presentación de la lógica fuera "sintáctica" y que Frege no concibiera ningún uso sustancial para una metalógica que empleara las nociones "semánticas" que hoy en día se usan de forma común.

Sin duda Frege tenía una concepción filosófica de la lógica diferente de las que preponderan hoy en día; en la actualidad es difícil encontrar defensores de ideas como las anteriormente reseñadas acerca de la naturaleza metafísica de la verdad. Además, naturalmente Frege no hace una presentación "semánti-

[8] El patriarca de esta escuela fue Burton Dreben. Seguidores y discípulos suyos han sido Jean van Heijenoort, Jaakko Hintikka, Thomas Ricketts y Warren Goldfarb; véase el magistral compendio que hace Goldfarb de esta línea de interpretación en su "Frege's Conception of Logic" (2001).

ca" de la lógica, sino una presentación deductiva o "sintáctica". Pero no es claro que estos hechos apoyen suficientemente ninguna especulación sobre la cuestión de qué habría sido admisible en metalógica para Frege. Una postura acerca de la verdad como la de Frege no es en principio incompatible con una aceptación de los llamados recursos "semánticos" en metalógica. Estos recursos no requieren una concepción particular de la naturaleza metafísica de la verdad, sino únicamente una aceptación de la matemática conjuntista por medio de la que se formulan, junto con una expectativa razonable, que puede tener muchos motivos, de que esos recursos proporcionan un instrumento alternativo y científicamente útil para la caracterización de ciertos conceptos como el de verdad lógica. Como Tarski argumentó convincentemente, el aparato "semántico" para el estudio de la lógica, que él sistematizó de forma definitiva, es en gran medida filosóficamente neutral. Por otro lado, el hecho de que Frege no utilizara esos recursos podría ser explicable meramente por el hecho de que no habían sido desarrollados —en realidad, Frege da algunos de los primeros pasos en el largo proceso que posibilitará su aparición.

Además, la idea de que Frege presenta "directamente" su cálculo deductivo, sin buscar "capturar" con él una determinada comprensión preexistente de la semántica de las expresiones lógicas, sólo puede defenderse (y así lo hacen los comentadores mencionados) a costa de introducir matices de sofisticada sutileza. Como vimos en la sección anterior, Frege es muy explícito acerca de la interpretación que da a las expresiones lógicas, y además claramente justifica algunas de sus reglas por referencia a esa semántica, lo cual es especialmente evidente en su justificación de la regla que permite derivar una fórmula de la forma de "$G \supset (\forall x)F(x)$" de una fórmula de la forma de "$(\forall x)(G \supset F(x))$" cuando "$x$" no aparece en G. Esto sugiere fuertemente que Frege no habría objetado a un estudio metalógico cuando menos de la corrección del cálculo proposicional con respecto a una semántica bivalente como la que él mismo esboza, ni a un estudio metalógico del cálculo de predicados mediante una caracterización más precisa que la suya de la semántica del cuantificador universal. La cuestión de si habría objetado a un estudio metalógico de la compleción de su cálculo con respecto a una semántica modelista como la estándar hoy en día lleva aparejadas algunas complicaciones adicionales, pero responderla negativamente parece igualmente especulativo.

Bibliografía

A. Referencias citadas en el texto

Coffa, J.A., 1991, *The Semantic Tradition from Kant to Carnap. To the Vienna Station*, Cambridge University Press, Cambridge.

Dummett, M.A.E., 1981, *Frege. Philosophy of Language*, 2a. ed., Duckworth, Londres.

Goldfarb, W., 2001, "Frege's Conception of Logic", en J. Floyd y S. Shieh (comps.), *Future Pasts. The Analytic Tradition in Twentieth-Century Philosophy*, Oxford University Press, Oxford, pp. 2–41.

Sullivan, P., 2004, "Frege's Logic", en D. Gabbay y J. Woods (comps.), *Handbook of the History of Logic. Volume 3. The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, Elsevier North-Holland, Ámsterdam, pp. 659–750.

B. Otras lecturas recomendables sobre la lógica y la filosofía de la lógica de Frege

Blanchette, P.A., 2012, *Frege's Conception of Logic*, Oxford University Press, Oxford.

Burge, T., 2005, *Truth, Thought, Reason. Essays on Frege*, Oxford University Press, Oxford.

Heck, Jr., R.G., 2012, *Reading Frege's* Grundgesetze, Clarendon, Oxford.

Macbeth, D., 2005, *Frege's Logic*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.