Notas sobre la paradoja de Orayen*

MARIO GÓMEZ TORRENTE
ICREA & Univ. de Barcelona, Depto. de Lógica, Baldiri Reixac, s/n, 08028 Barcelona, España
Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM; México DF 04510, México
mariogt@servidor.unam.mx

Abstract. The typical restriction to models with set domains is a source of discomfort in the model theory of set theory, where the intended domain is not a set. Raúl Orayen noted the difficulty, claimed that a paradox lurked in its vicinity, and offered two alternative proposals for dealing with it. In this note I briefly describe the problem and some ramifications not considered by Orayen, reject his claim that it gives rise to a paradox, and give reasons for going along the direction of one of his proposals.

1. La tesis conjuntista de la teoría de modelos

Los practicantes de la teoría de modelos prueban sus teoremas utilizando consideraciones matemáticas de todo tipo, y raramente se preocupan de si sus resultados son invariablemente análogos a verdades acerca de entidades conjuntistas. Sin embargo, es común suponer que el núcleo de la teoría de modelos estándar lo forman resultados que al menos se corresponden con verdades análogas acerca de entidades conjuntistas apropiadas. En este sentido, la tendencia común es suponer que la teoría de modelos estándar comparte el sino de la totalidad de la matemática clásica: puede reproducirse en la teoría de conjuntos. Dicho de manera ligeramente más precisa, el supuesto es que cualquier resultado matemático de la teoría de modelos estándar se corresponderá con una verdad análoga acerca de estructuras conjuntistas. Llamemos a este supuesto 'la tesis conjuntista de la teoría de modelos' (TCM). TCM implica que si hay un modelo que tiene una cierta propiedad matemática de las que estudia la teoría de modelos estándar, entonces hay un modelo conjuntista con esa propiedad (el converso es obvio); también implica que si todos los modelos conjuntistas tienen una cierta propiedad, entonces todos los modelos la tienen (el converso es obvio).

La tendencia a dar por buena TCM no debe confundirse con una aceptación acrítica de la simple idea de que los modelos aceptables de los lenguajes formales son (o se

* Deseo expresar mi profunda gratitud a Raúl Orayen por muchas pláticas filosóficas, fueran sobre su paradoja o no, y también por muchos encuentros en los que he podido disfrutar de su sabiduría, su sentido común y su amistad, generosa y alegre aun en momentos muy difíciles para él.

corresponden de una manera inmediata con) conjuntos. En mi opinión, el razonamiento en el que Raúl Orayen ha visto la fuerza de una paradoja se apoya en esta falsa idea como premisa. Orayen razona esencialmente como sigue[1]. Sería difícil negar que una formalización habitual en un lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos ZFC (digamos) es una formalización que posee un modelo natural que la hace verdadera. Por otro lado, el supuesto habitual de los practicantes de la teoría de modelos es que los modelos aceptables de los lenguajes formales son estructuras conjuntistas. Pero el modelo natural que posee la formalización de ZFC no es una estructura conjuntista. Orayen concluye que hay una contradicción entre esta tesis y el supuesto de los practicantes de la teoría de modelos.

Sin duda hay una contradicción. Pero me inclino a pensar que no tiene la fuerza de una paradoja, porque mi impresión es que los teóricos de los modelos no aceptan en realidad el supuesto que Orayen les atribuye. Puede que en algunos casos no se hayan detenido a pensar muy claramente sobre el asunto, pero apenas lo piensen un poco rechazarán sin vacilaciones el supuesto usado por Orayen[2], de manera que la situación no es comparable a la que se da en el caso de las auténticas paradojas, donde no está claro cuál

[1] Véase Orayen (2003) para la formulación exacta, que naturalmente es más compleja. Véase también Orayen (1992) para una formulación algo distinta pero esencialmente idéntica del razonamiento.

[2] En sus dos trabajos citados, al afirmar que la teoría de modelos de los lenguajes de primer orden se lleva a cabo dentro de una teoría de conjuntos como ZFC, Orayen dice que la razón fundamental para ello es el miedo de los teóricos a las paradojas de la teoría intuitiva de conjuntos. ¿Puede usarse esta idea para dudar la conveniencia de rechazar que todos los modelos aceptables sean conjuntistas? Creo que es muy claro que no, pues obviamente el miedo a las paradojas no justifica una medida tan drástica como la de prohibir cualquier referencia a estructuras no conjuntistas. Precisamente el desarrollo de ZFC y otras teorías formalizadas de conjuntos ha hecho posible una comprensión de varios mecanismos naturales (como los del propio Orayen en la "Solución II" de (2003), sobre la que vuelvo más abajo) para tratar matemáticamente y sin inconsistencia las clases propias. (Por otro lado, como señalaré más abajo, dudo que la razón fundamental por la que los teóricos creen que la teoría de conjuntos es un marco apropiado para la de modelos tenga mucho que ver con las paradojas. Como se explicará luego, tiene más bien que ver con la idea habitual de que la teoría de conjuntos en abstracto, no una versión formalizada específica como ZFC, versa sobre un ámbito "máximamente comprensivo" de estructuras matemáticas.)

de los supuestos que lleva a una contradicción hay que rechazar[3]. Ningún teórico, que yo sepa, ha admitido o propuesto que los modelos aceptables de los lenguajes formales sean siempre conjuntistas[4]. Lo que sí es común suponer, como se señaló más arriba, es que la teoría de modelos estándar es esencialmente una parte de la teoría de conjuntos.

¿Está justificada la tendencia a suponer que la teoría de modelos estándar es en esencia una parte de la teoría de conjuntos? Si la interpretación deseada de la teoría de conjuntos misma no es un conjunto, ¿hay razones para pensar que los resultados matemáticos que informalmente podamos obtener mencionando esta y otras interpretaciones similares, o cuantificando sobre ellas, tendrán una correspondencia apropiada en verdades acerca de estructuras conjuntistas, y viceversa? En otras palabras, ¿hay razones para adoptar TCM? Creo que puede decirse que hay una serie de razones para responder afirmativamente en el caso de ciertos ámbitos particulares de resultados de la teoría de modelos estándar. Pero dudo que se pueda decir que haya razones plenamente convincentes para una respuesta afirmativa en el caso general. El descubrimiento de razones mejores que las que tenemos hasta ahora constituye indudablemente un problema genuino y profundo para la filosofía de la lógica y las matemáticas, ligado inextricablemente a dificultades características de los fundamentos de la teoría de conjuntos.

2. Modelos, conjuntos y satisfacibilidad

Una de las propiedades matemáticas fundamentales, si no la fundamental, de las que se ocupa la teoría de modelos estándar es la de satisfacibilidad. Es una propiedad de las

[3] En toda esta discusión utilizo un sentido ya habitual de 'paradoja' en la literatura filosófica: un razonamiento que llega a una contradicción a partir de premisas que parece difícil o imposible negar. (Personalmente prefiero reservar este sentido para el término tradicional 'antinomia'.) Orayen parece usar 'paradoja' simplemente como sinónimo de 'contradicción'. Incluso en este sentido más idiomático sus observaciones sólo tendrán interés si las premisas usadas en la derivación de la contradicción gozan de una aprobación sólida y generalizada.

[4] Los rechazos *explícitos* de esta idea pueden no ser muy frecuentes, pero existen, incluso en manuales. Véanse, por ejemplo, Kreisel y Krivine (1967) y Bell y Slomson (1969), donde el contraste entre modelos conjuntistas y no conjuntistas, así como versiones de TCM, se enuncian claramente.

fórmulas de los lenguajes formales (y más en general, de conjuntos de fórmulas). Una fórmula es satisfacible cuando hay un modelo que la hace verdadera. La noción de validez, otra de las nociones fundamentales de la teoría de modelos, está estrechamente unida a la de satisfacibilidad. Una fórmula es válida cuando todos los modelos la hacen verdadera. Por ello, para lenguajes formales que contienen el signo de negación, las dos propiedades son interdefinibles: una fórmula es satisfacible si y sólo si su negación no es válida; es válida si y sólo si su negación no es satisfacible. ¿Hay razones para creer que los resultados estándar acerca de la noción de satisfacibilidad (e indirectamente, acerca de la noción de validez) tienen una correspondencia apropiada en verdades acerca de estructuras conjuntistas?

Como a menudo ocurre en filosofía y en ciencia, hay que empezar aislando algunos contraejemplos aparentes pero superficiales a la tesis que se está examinando. Esto suele permitir acotar también el sentido de la tesis, y el caso presente no será una excepción. No es difícil construir lenguajes formales acompañados de una noción de verdad en un modelo en los cuales hay fórmulas satisfacibles pero no satisfacibles por ninguna estructura conjuntista. Imaginemos un lenguaje como los de primer orden pero con un cuantificador monádico adicional, '$(\exists^{CP}x)$', con el significado "existe al menos una clase propia de x's tales que...", que podemos reflejar en la cláusula apropiada de una definición de "verdad en un modelo" para este lenguaje[5]. En este lenguaje habrá fórmulas satisfacibles pero no satisfacibles por ninguna estructura conjuntista. La fórmula '$(\exists^{CP}x)(P(x) \vee \sim P(x))$' (en la que 'P' es un predicado cualquiera del lenguaje) será una de ellas. Otro lenguaje con fórmulas satisfacibles pero no satisfacibles en estructuras conjuntistas sería, por ejemplo, un lenguaje infinitista con conjunciones de una clase propia de miembros y una constante individual c_α diferente para cada ordinal α. La conjunción $\bigwedge_{\alpha,\beta\in\Omega,\alpha\neq\beta}(c_\alpha \neq c_\beta)$ de este lenguaje es una fórmula satisfacible pero no por modelos conjuntistas. El valor de estos aparentes contraejemplos es como mínimo dudoso. La duda principal es si estos lenguajes son lenguajes de los que se pueda decir que son objetos de estudio de la teoría de modelos estándar, la teoría para la que TCM les ha parecido plausible a los teóricos de modelos que

[5] Tomo este cuantificador prestado de McGee (1992).

la han aceptado. La respuesta parece claramente negativa, y lo parece independientemente de estipulaciones *ad hoc* acerca del alcance de la teoría de modelos estándar.

En realidad, la lista de lenguajes formales para los que TCM ha parecido aceptable es relativamente restringida, aun si es amplia en términos absolutos y no ha sido nunca acotada de forma precisa. El núcleo esencial de lenguajes formales de los que se ocupa la teoría de modelos estándar lo integran básicamente los lenguajes cuantificacionales clásicos, finitarios e infinitarios (de cardinalidades conjuntistas), con órdenes de cuantificación tanto finitos como transfinitos.

¿Hay razones para pensar que TCM es correcta al menos en lo que respecta a los resultados acerca de la noción de satisfacibilidad para estos lenguajes? Aquí consideraremos brevemente dos casos representativos: los lenguajes clásicos de primer orden y los lenguajes clásicos de segundo orden.

En el caso de primer orden, puede decirse que hay razones definitivas o casi definitivas para aceptar TCM. La idea fundamental es que si una fórmula de primer orden es satisfacible en un modelo no conjuntista, entonces una versión informal, no conjuntista, de la misma construcción que permite probar la versión de submodelos del teorema de Löwenheim-Skolem sirve para construir un submodelo numerable, y por tanto conjuntista, del modelo no conjuntista, submodelo que además satisface la fórmula original. Otra manera, algo más formal, de defender la misma conclusión sería la siguiente: si la fórmula es satisfacible en un modelo no conjuntista, entonces ha de ser consistente (con respecto a un cálculo deductivo normal); por tanto, por el teorema de compleción de Gödel, es satisfacible por una estructura conjuntista, y de hecho por una numerable[6].

El caso de los lenguajes de segundo orden es sustancialmente distinto. No hay análogos inmediatos de los teoremas de Löwenheim-Skolem o de compleción de Gödel para estos lenguajes, de manera que los argumentos del párrafo anterior no proceden en este caso. Sí hay, sin embargo, consideraciones que sugieren (aunque no de manera tan concluyente como en el caso de primer orden) que las formulas de segundo orden satisfacibles por modelos no conjuntistas lo son también por modelos conjuntistas. De

[6] Este razonamiento es una versión algo compacta de un célebre argumento de Kreisel (1965) y (1967). Véanse Gómez Torrente (1998/9) y (2000a) para una exposición detallada del argumento de Kreisel.

todos modos, un aspecto importante en el que la situación en segundo orden es diferente a la de primer orden es que los modelos conjuntistas apropiados han de ser a menudo estructuras cuya existencia no se sigue de la teoría habitual ZFC, sino de diversas extensiones suyas que se han considerado.

Sabemos, por ejemplo, que hay fórmulas de segundo orden que son sólo satisfacibles por estructuras cuyo dominio tenga el tamaño de un cardinal inaccesible. Pero la existencia de cardinales inaccesibles es independiente de ZFC. Esto sólo supone una dificultad para TCM si todas las estructuras de cardinalidad inaccesible son clases propias. La tendencia habitual entre los teóricos de conjuntos es precisamente aceptar que hay cardinales inaccesibles que son conjuntos, aunque su existencia no se siga de ZFC[7].

Aunque no hay análogos inmediatos de los teoremas de Löwenheim-Skolem y de compleción para los lenguajes de segundo orden, hay algunos resultados precisamente de la teoría de modelos estándar que proporcionan información semejante. Uno de esos resultados nos interesa especialmente aquí. El resultado[8] muestra que si una fórmula de segundo orden es satisfacible por un modelo, entonces es posible construir un submodelo suyo que también satisface la fórmula y cuya cardinalidad sea menor o igual que la del primer cardinal supercompacto. Es un resultado significativo, porque nuevamente la tendencia habitual entre los teóricos de conjuntos parece ser aceptar que hay cardinales supercompactos que son conjuntos[9] (aunque el primer supercompacto es ya extremadamente grande).

Hay una consideración relacionada con estas que es más importante si cabe. La consideración surge de una característica distintiva de la teoría de conjuntos, que seguramente no ha acompañado a la teoría desde sus orígenes, sino que ha ido emergiendo a medida que la teoría y su capacidad de albergar la matemática clásica se han ido haciendo evidentes a lo largo del siglo XX. Esa característica es que ha llegado a vérsela, justificadamente o no, como una teoría que debería ser "máximamente comprensiva", en el sentido de que su ámbito debería contener la mayor y más rica diversidad posible de

[7] Véase la exposición en Maddy (1988).

[8] Debido básicamente a Magidor (1971). Véase también la exposición en Shapiro (1991).

[9] Véase de nuevo Maddy (1988).

estructuras. Esta idea inspira la tendencia mencionada de los teóricos de conjuntos que los lleva a ver con buenos ojos la incorporación al universo conjuntista de cardinales inaccesibles, supercompactos, etc. Pero también les ha inspirado propuestas relacionadas de modo muy significativo con el problema que nos preocupa, y esas propuestas dan pie a la consideración anunciada.

Las propuestas en cuestión son propuestas de nuevos axiomas para la teoría de conjuntos del tipo conocido como 'principios de reflexión'. Un principio de reflexión típico dice de una cierta propiedad que si el universo de la teoría de conjuntos la tiene entonces también hay un conjunto que la tiene. Pues bien, varios de los principios de reflexión propuestos son de esta forma: si el universo de la teoría de conjuntos satisface una fórmula de un cierto lenguaje o lenguajes (que siempre se encuentran entre los lenguajes de los que se ocupa la teoría estándar de modelos), entonces hay un conjunto que satisface esa misma fórmula. Algunos de estos principios implican directamente la existencia de grandes cardinales como los mencionados antes (aunque estos cardinales se definen de formas independientes motivadas por ideas conjuntistas), y en general tienen muchas consecuencias deseables. Los principios de reflexión especialmente potentes pueden verse de hecho como intentos de codificar aproximadamente el contenido de TCM, empleándose indirectamente en su formulación la noción de satisfacibilidad de fórmulas de varios lenguajes formales muy ricos. Esta es la consideración a la que me refería: la tesis conjuntista de la teoría de modelos recibe apoyo del hecho de que los teóricos de conjuntos han intentado extender su teoría por medio de versiones precisas en el lenguaje conjuntista de las ideas sobre satisfacibilidad que implica la tesis general TCM.

3. Las soluciones de Orayen

Orayen considera dos posibles soluciones al razonamiento que él presenta como paradójico. Pero si bien habla menos desfavorablemente de la segunda, no expresa una preferencia decidida por ninguna. Recordemos que su razonamiento usa el supuesto de que los modelos aceptables de los lenguajes formales son estructuras conjuntistas, y señala que contradice la intuición de que el modelo natural que posee ZFC no es una estructura conjuntista. Las soluciones de Orayen niegan el supuesto. La primera solución ("Solución I") consiste esencialmente en proponer que los modelos aceptables de los lenguajes formales no son estructuras conjuntistas, sino que son (o pueden verse como) simplemente grupos de expresiones significativas de un lenguaje previamente interpretado; estas expresiones proporcionan las interpretaciones del dominio de cuantificación (por medio de un predicado monádico verdadero de los objetos del dominio), de las constantes no lógicas, y de las variables libres en las asignaciones de valores. (En el caso de la teoría de conjuntos, el modelo viene dado, presumiblemente, por los predicados 'es un conjunto' y '$\in$'.) Podemos llamar a los modelos de que habla la solución I 'interpretaciones expresivas'. La segunda solución ("Solución II") consiste esencialmente en proponer que los modelos son las estructuras conjuntistas, las estructuras cuyo dominio es una clase propia incluida en el universo de los conjuntos, y las estructuras que se pueden obtener por medio de la iteración finita de la formación de hiper-clases a partir del universo de los conjuntos[10].

Vistas como alternativas posibles a TCM, las soluciones I y II de Orayen parecen innecesarias, al menos en el presente estado de nuestros conocimientos: no hay motivos para rechazar TCM e incluso hay, como hemos visto, buenos motivos para aceptar ricas versiones parciales de TCM. Pero Orayen no tenía en mente una alternativa a TCM, sino una respuesta a lo que él parece haber percibido como la necesaria tarea de caracterización de la *noción* de modelo aceptable (de los lenguajes formales). Me apresuro a aclarar que no atribuyo a Orayen el deseo de ofrecer una caracterización analíticamente equivalente (un "análisis conceptual") de la noción, sino meramente el deseo de caracterizarla extensionalmente, o como mínimo de caracterizar una noción suficientemente amplia como para incluir a todos los modelos que pueda convenir mencionar matemáticamente. Según la caracterización que Orayen atribuye a los teóricos de los modelos, los modelos son los modelos conjuntistas. Dado que esta caracterización es incorrecta (como sabemos y como muestra en cualquier caso Orayen), Orayen ve necesario proponer una nueva caracterización. Cabe entender las soluciones I y II de Orayen como nuevas caracterizaciones.

Orayen examina las virtudes y defectos de cada solución. A favor de la solución I menciona el hecho de que se puede probar un análogo del teorema de compleción de Gödel hablando sólo de interpretaciones expresivas proporcionadas por un lenguaje matemático

[10] La formulación de Orayen es diferente, pero la recién hecha captura el espíritu de su propuesta.

previamente interpretado (cuyas nociones, al ser de la matemática clásica, son además expresables por medio de "traducciones" al lenguaje de la teoría de conjuntos). En concreto, el teorema análogo dice que toda fórmula consistente de un lenguaje de primer orden es satisfacible por una interpretación en la que el dominio son los números naturales y las constantes no lógicas denotan números o conjuntos definibles en la aritmética de primer orden[11]. Vale la pena notar que este teorema implica intuitivamente que si un modelo no conjuntista satisface una fórmula entonces hay una interpretación expresiva aritmética (y por tanto conjuntista) que lo satisface.

En mi opinión, sin embargo, se puede argumentar de manera concluyente que esta virtud es insuficiente para los propósitos de Orayen[12]. O al menos es insuficiente si aceptamos un cierto tipo de supuestos muy razonables. Por ejemplo, es una consecuencia del axioma de elección que hay buenos órdenes del conjunto de los números reales. Pero al mismo tiempo es razonable pensar que ninguno de estos buenos órdenes es definible en un lenguaje matemático muy expresivo, el de la teoría de conjuntos[13]. Sin embargo, es bien sabido que hay una fórmula de segundo orden BO(P, X) que es sólo satisfacible por un modelo en el que 'P' denote una relación de buen orden del conjunto asignado a la variable 'X'. Supongamos que adoptamos la solución I y que partimos del lenguaje interpretado de la teoría de conjuntos. Si a la variable 'X' le asignamos en una interpretación expresiva un predicado conjuntista que se aplique exactamente a los reales, nos veremos presumiblemente obligados a decir que no hay una interpretación expresiva que satisfaga BO(P, X) con respecto a esa asignación. Pero esto es indeseable, porque intuitivamente hay modelos (naturalmente conjuntistas) que satisfacen la fórmula BO(P, X) con respecto a una

[11] Orayen atribuye el resultado a Quine (1986) y nos refiere a ese lugar para una prueba, pero ambas referencias son inexactas. El teorema se debe a Hilbert y Bernays (1934-1939). Posteriormente se extendió a conjuntos de fórmulas y la clase de predicados aritméticos suficientes fue refinada aún más por otros autores; véase especialmente Kleene (1952).

[12] Como dije antes, Orayen señala varios defectos de las soluciones I y II, pero ello no lo lleva a rechazarlas, y sólo apenas da a entender una tibia preferencia por la solución II.

[13] Este supuesto recibe apoyo de un conocido resultado de independencia según el cual ZFC no se convierte en inconsistente si le añadimos un esquema de la forma "$\varphi(x,y)$ no es un buen orden del conjunto de los reales". Véase Feferman (1965).

asignación que asigne el conjunto de los reales a ‘X’. Podría replicarse que debemos partir de un lenguaje interpretado más amplio que el de la teoría de conjuntos. A esto podría contrarreplicarse que no tendríamos razones para pensar que no habríamos simplemente pospuesto el problema. Además, habrá en cualquier caso verdades matemáticas estándar acerca de la satisfacibilidad de ciertas fórmulas que se traducirán en falsedades si aceptamos la caracterización propuesta por la solución I. Un ejemplo trivial: para todo cardinal κ, toda fórmula satisfacible de primer orden es satisfacible por al menos κ modelos diferentes. Pero un lenguaje interpretado numerable sólo da lugar a lo sumo a tantas interpretaciones expresivas (de otro lenguaje numerable) como números reales[14]. Estos ejemplos me hacen pensar que la solución I es inadecuada para los propósitos de Orayen[15].

La solución II es algo más apropiada como respuesta al problema de Orayen. Pero Orayen ofrece una seria objeción a esta solución: por mucho que ascendamos en el proceso de formación de hiper-clases, será imposible formalizar una teoría cuya interpretación natural sea una de esas hiper-clases y en la que esa hiper-clase se contenga a sí misma (y por tanto aparezca en el dominio de cuantificación de la teoría). Es claro que esta limitación reaparecerá de una manera u otra si buscamos caracterizar la colección de los modelos intuitivos posibles. Sin embargo, me permito observar que la solución II posee una virtud muy notable que no posee la solución I. Aun si la solución II no es plenamente correcta extensionalmente, bajo la noción de modelo que propone caen todos los modelos conjuntistas y muchos más. De manera que la solución II sólo falla extensionalmente para modelos muy “por encima” de los mencionados por su nombre en la teoría de modelos estándar informal (aunque en la teoría de modelos informal presumiblemente se cuantifica sobre “todos” los modelos).

[14] Un defensor acérrimo de la solución I puede proponer partir de lenguajes interpretados de cualquier cardinalidad como base de nuestras interpretaciones expresivas. Pero si esa es la propuesta, deja de ser claro que haya una diferencia sustantiva entre la solución I y una solución no expresiva.

[15] Puede mencionarse que esta inadecuación se dará independientemente de la posición que Orayen tenga sobre la cuestión filosófica de si la lógica de segundo orden es lógica o no. Aun si uno responde negativamente a esto, el problema de qué modelos tiene una fórmula de segundo orden permanece como un problema autónomo de la teoría matemática de modelos.

La solución II sugiere una tesis análoga a TCM pero más débil. Tal vez sea bueno mencionarla, aun si la propuesta de Orayen perseguía un propósito diferente. Es similar a TCM, pero formulada para las estructuras conjuntistas auxiliadas por unas pocas de las primeras hiper-clases. Expresémosla intuitivamente así: cualquier verdad matemática de la teoría de modelos estándar se corresponde con una verdad análoga acerca de estructuras conjuntistas y/o algunas de las primeras hiper-clases. Podríamos llamar a esta tesis 'la tesis hiperclasista moderada para la teoría de modelos' (THMM). THMM es verdadera si TCM lo es, claro está. Más interés tiene notar que aun si TCM es falsa THMM puede ser verdadera; y no por ello la cuestión de su justificación ha de ser forzosamente menos espinosa que la cuestión de la justificación de TCM[16].

Referencias

Bell, J.L. y A.B. Slomson (1969), *Models and Ultraproducts*, North-Holland, Amsterdam.

Feferman, S. (1965), "Some Applications of the notions of forcing and generic sets", *Fundamenta Mathematicae*, vol. 56, 325-345.

Gómez Torrente, M. (1998/9), "Logical Truth and Tarskian Logical Truth", *Synthese*, vol. 117, 375-408.

—— (2000a), *Forma y Modalidad*, Eudeba, Buenos Aires.

—— (2000b), "A Note on Formality and Logical Consequence", *Journal of Philosophical Logic*, vol. 29, 529-539.

Hilbert, D. y P. Bernays (1934-1939), *Grundlagen der Mathematik*, vols. I (1934) y II (1939), Springer, Berlín.

Kleene, S.C. (1952), *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, Amsterdam.

Kreisel, G. (1965), "Mathematical Logic", en T.L. Saaty (comp.), *Lectures on Modern Mathematics, vol. III*, John Wiley & Sons, Nueva York, 95-195.

—— (1967), "Informal Rigour and Completeness Proofs", en I. Lakatos (comp.), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 138-171.

Kreisel, G. y J.L. Krivine (1967), *Elements of Mathematical Logic (Model Theory)*, North-Holland, Amsterdam.

McGee, V. (1992), "Two Problems with Tarski's Theory of Consequence", *Proceedings of the Aristotelian Society,* n.s., vol. 92, 273-292.

[16] Una idea similar a la que inspira THMM se halla implícita, en mi opinión, en los trabajos pioneros de Tarski sobre teoría de modelos en los años 30 del siglo XX; véase mi (2000b). Posteriormente Tarski parece haberse convertido en uno de los máximos inspiradores de TCM (en gran medida tácitamente).

Maddy, P. (1988), “Believing the Axioms. I” y “Believing the Axioms. II”, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 53, 481-511 y 736-764.

Magidor, M. (1971), “On the Role of Supercompact and Extendible Cardinals in Logic”, *Israel Journal of Mathematics*, vol. 10, 147-157.

Orayen, R. (1992), “La teoría de modelos vista por el ojo de Dios”, *Diánoia*, vol. 38, 161-170.

—— (2003), “Una paradoja en la semántica de la teoría de conjuntos”, incluido en este volumen.

Quine, W.V. (1986), *Philosophy of Logic*, 2a edición (1a edición, 1970), Harvard University Press, Cambridge (Mass.).

Shapiro, S. (1991), *Foundations without Foundationalism*, Clarendon, Oxford.