IMPLICACION MATERIAL

Raymundo Morado
IIFs-UNAM, México

Desde Filón de Megara, en el siglo IV a. C., se ha estudiado variantes del condicional material (también llamado "consecuencia" o "implicación", "extensional" o "veritativo-funcional"). Este interés revivió en la Edad Media y a mediados del siglo XIX con Boole. En el capítulo XII de *The Laws of Thought,* Boole representa la frase de Cicerón *"Si alguien nace al salir Sirio, no morirá en el mar"*[1] como ***YX*** = ***0***. La interpretación sería: "No es cierto que (= ***0***) Fabio nació al salir Sirio (***Y***) y morirá en el mar (***X***)".

Podemos abreviar "No se da A sin B" con la ayuda del símbolo "⊃" al que familiarmente llamamos "herradura". Es usual leer "A ⊃ B" como "Si A entonces B" y decimos que simboliza un condicional, una relación de consecuencia o una implicación. Ésta es una lectura desafortunada porque no es ninguna de estas cosas en el sentido cotidiano; cuando mucho es un condicional en un sentido técnico. Le llamamos "condicional material" pues lo único que hace es hablar sobre la materia de las proposiciones, es decir, sus valores de verdad, diciendo que no se da la combinación de que es verdad A y falsedad B. Hay que notar que puede haber varias razones por las que no se da la combinación. En los condicionales normales hay razones de peso por las que no puede darse la combinación. Pero el condicional material sólo dice que no se da la combinación, tal vez porque de manera vacua la primera condición no es verdadera o la segunda condición no es falsa; puede que no haya ninguna relación entre A y B. Por ejemplo, no se da de hecho que la luna sea de queso; por lo tanto, no se da de hecho que la luna sea de queso sin que nosotros seamos ratones. Por lo tanto, "Si la Luna es de queso, nosotros somos ratones" es cierto en el sentido del condicional material. Por supuesto, no es cierto en la mayoría de los otros sentidos que nos interesan en la vida diaria. Pero es cierto en el sentido "material", aunque suene paradójico. Las "paradojas materiales" más conocidas son:

1) Si una proposición es verdadera, cualquier otra proposición la implica materialmente (paradoja positiva).
2) Si una proposición no es verdadera, implica cualquier otra proposición materialmente (paradoja negativa).
3) Dadas cualesquiera dos proposiciones, por lo menos una de ellas implica a la otra (paradoja de conmesurabilidad).

Bajo la influencia de la obra de Boole, muchos lógicos llegaron a la conclusión de que, vistas apropiadamente, las pretendidas "paradojas" no eran tales. Ésta fue la opinión de Schröder en sus *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1890-1905),

[1] G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought,* New York: Dover Publ., 1958, p. 179. La frase de Cicerón en el *De Fato* (VII, 8) es: *"Si quis [Fabius] natus est oriente Canícula, is in Mari non morietur"*.

repetida por Couturat: "Si α es verdadera, α es implicada por una proposición β cualquiera; si α es falsa, α implica una proposición β cualquiera.[2]

Desde principios del siglo XX, una fuente importante de inspiración de los trabajos lógicos han sido los *Principia Mathematica* (1910-1913) de Russell y Whitehead, especialmente la sección A de la primera parte, intitulada *The Theory of Deduction.* Si bien las paradojas no son usadas en las demostraciones de los *Principia,* en la sección **A** se las menciona "por su interés intrínseco". La presentación que reciben es la normal:

> Dadas dos proposiciones *p, q* cualesquiera, *p* o no-*p* deben implicar *q,* y *p* debe implicar *q* o no-*q*, y *p* implica *q* o *q* implica *p*; y dada una tercera proposición *r, p* implica *q* o *q* implica *r.*

Pero, ¿qué se entiende en los *Principia* por "implicación"? Allí leemos:[3]

> En orden a que una proposición pueda ser inferida a partir de otra, es necesario que las dos tengan esa relación que hace a la una consecuencia de la otra. Cuando una proposición *q* es consecuencia de una proposición *p,* decimos que *p implica q.*

De esta noción familiar de implicación transitaremos a otra que legitime las paradojas. El nexo se ofrece a continuación: "Así, la deducción depende de la relación de *implicación*, y cada sistema deductivo debe contener entre sus premisas cuantas propiedades de la implicación sean necesarias para legitimar el proceso ordinario de deducción".

Y, ¿cuál es el proceso "ordinario"? En el contexto de los *Principia,* la inferencia matemática. Para tal contexto, entender la implicación como la conversa de toda relación de deducibilidad, es más de lo que precisamos. Nuestras necesidades en buena parte de este ámbito, como demostraron brillantemente los *Principia,* no rebasan el llamado "condicional *filónico*", es decir, el condicional material.

Podemos evitar confusiones si estamos atentos, en la definición de la implicación, al tránsito de lo que *es* la implicación a lo que *requerimos* de la implicación. Veamos:[4]

> *Definición de la implicación*. Cuando una proposición *q* se sigue de una proposición *p* de manera tal que, si *p* es verdadera, *q* debe ser verdadera, decimos que *p implica q.* [Hasta aquí estamos en el terreno usual]. La idea de implicación, en la forma en que requerimos, puede ser definida. [El tránsito está hecho]. El significado que se ha de dar a la implicación en lo que sigue puede a primera vista parecer algo artificial; pero, aunque hay otros significados legítimos, el aquí adoptado es muchísimo más

[2] L. Couturat, *L'algèbre de la logique,* París, 1914, p.91.
[3] B. Russell y A. N. Whitehead, *Principia Mathematica,* Cambridge: University Press, reimpresión de 1950, vol. I, p. 90.
[4] Frege, en el *Begriffsschrift* (1879), parte más bien de esta noción mínima: no (p y no q), y después agrega otras consideraciones para formar una implicación; por ejemplo, para la causalidad, intenta usar cuantificadores.

> conveniente para nuestros propósitos que cualquiera de sus rivales. [Lo que mucha gente no notó, en una primera lectura, fue que no se estaba definiendo la implicación estrictamente hablando, sino solamente lo que de implicación requería el programa de fundamentación de las matemáticas; ésta era una empresa lógica parcial]. La propiedad esencial de la implicación que requerimos es ésta: "Lo que está implicado por una proposición verdadera es verdadero". Es en virtud de esta propiedad que la implicación produce pruebas. [La noción de prueba también se restringe, como puede notarse]. Pero esta propiedad de ninguna manera determina si alguna cosa, y, si alguna, cuál, es implicada por una proposición falsa. Lo que determina es que, si *p* implica *q,* entonces no puede darse el caso de que *p* sea verdadera y *q* falsa, i.e. debe ser el caso que *p* sea falso o *q* sea verdadera. La interpretación más conveniente de la implicación es decir, conversamente, que si *p* es falsa o *q* es verdadera, entonces "*p* implica *q*" ha de ser verdadera.

Por otra parte, la distinción es aclarada así por Russell:[5]

> "Implica", en cuanto es usado aquí, no expresa nada más que la conexión entre *p y q,* también expresada por la disyunción "no-*p* o *q*". [Pero, para confundir más a lectores desprevenidos, agrega:] El símbolo empleado para "*p* implica *q*", i.e. para "$\sim p \vee q$" es "$p \supset q$". Este símbolo puede leerse también "si *p,* entonces *q*". Así, la "implicación material" es simplemente la "implicación", tal como se ha definido aquí.

Por supuesto, las paradojas que surgen de la implicación material sólo tienen de paradojas el nombre. Ya en 1928 Paul Weiss hablaba del consecuente como una disyunción de la cual el antecedente era uno de los disyuntos.[6] Si aceptamos la Adición como una regla de inferencia correcta, bastará mostrar que toda inferencia que permiten los *Principia* puede ser obtenida mediante las equivalencias necesarias, usando solamente la Adición. La idea de fondo es que decir que **A** implica, en los *Principia,* a **B**, es lo mismo que decir que hay algún **C** tal que (**A** $\vee$ **C**) $\equiv$ **B**. Es fácil probar que las reglas de inferencia de los *Principia* efectivamente tienen esta propiedad. También podría hablarse del antecedente como una conjunción de la cual el consecuente es uno de los conyuntos. Aquí la regla clave sería la simplificación.

La conclusión a la que llegamos es doble: el que algo falso implique materialmente cualquier cosa no tiene nada de paradójico, pero hay que recordar que la implicación material no siempre coincide con una implicación. Esto último no siempre se ha recordado. Por ejemplo, en varios libros de lógica se pide al alumno que demuestre veritativo-funcionalmente una proposición en que aparece alguna conectiva intensional en posición principal. Por ejemplo, Ballard propone el siguiente ejercicio: "Simbolícese… No es el caso que si la luna está hecha de

[5] Russell y Whitehead, *Op. Cit., p. 7*
[6] Cfr. P. Weiss, "Relativity in Logia", en *The Monist,* (1928), p. 546.

queso verde entonces los vehículos espaciales no serán capaces de posarse en ella”.[7]

La respuesta que da Ballard, y que él mismo comenta, es: “~ (**M** ⊃ ~ **S**). (Nótese —explica Ballard— que de este enunciado aparentemente verdadero, uno puede deducir que la luna está hecha de queso verde)”.[8]

Ballard no señala que la relación de deducción puede simbolizarse como condicional material sólo a costa de perder información. Como notó Russell, el condicional material es una condición mínima de una deducción pero no es una condición suficiente. De esto se sigue que no debe simbolizarse la negación de una relación de deducibilidad como negación de un condicional material correspondiente. Estaríamos en este caso añadiendo ilegítimamente información, pues, siendo el condicional material sólo una de las condiciones para la deducibilidad, pudo haber sido alguna otra condición la que fallara.

En este caso la conectiva principal, la negación, es intensional “por contaminación” con la conectiva que niega. Un ejemplo más claro lo proporciona Benson Mates, quien es su *Elementary Logic* (1965) pide al estudiante, a pesar de las advertencias que él mismo escribió capítulos antes, que pruebe un “si… entonces…” mediante el expediente de probar un condicional material.

Parecen cumplirse los negros agüeros que en 1932 expresara A. Sidgwick; “los hábitos mentales inducidos por el vivir entre las certezas artificiales de una lógica traviesa o no-contenciosa puede tender a obstaculizar nuestros esfuerzos para el razonamiento serio”.[9] Todavía hoy vemos tal peligro en quienes descuidan el valor y la función normativa de la lógica. Vivir mucho en los sistemas y poco en los razonamientos cotidianos tiene sus riesgos.

Por supuesto, cuando los lógicos cometen tales descuidos no son más que descuidos. Nadie debiera confundir a la humilde implicación material con la imponente implicación lógica. Incluso cuando alguien como Quine sigue la desafortunada lectura de los *Principia* y llama al condicional material “si…entonces…”,[10] en el contexto se entiende perfectamente que se ha apartado del uso cotidiano de la expresión.

Claro que hablar del “uso cotidiano” es peligroso. Expresiones como “**A** sólo si **B**” o “No **A** a menos que **B**” pueden ser, según el contexto, expresiones de implicación o de equivalencia, igual que “**A** siempre y cuando **B**”. Incluso, como Quine nota en *Methods of Logic*, ordinariamente no se afirma la verdad del condicional sino que se afirma condicionalmente la verdad del consecuente. Cuando el antecedente es falso, el condicional no se verifica, sino que se cancela.

---

[7] K. E. Ballard, *Study Guide for Copi: Introduction to Logic,* New York: Macmillan, 1972, p. 203.
[8] *Ibid.,* p. 204.
[9] A. Sidgwick, “Discusión Note”, en *Mind*, 41 (1932), p. 344.
[10] Cfr. W. V. O. quine, *Methods of Logic,* New York: Holton, Rinehart and Winston, 1972 (3a. ed.), y en la edición de Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1982.

Es fácil acumular ejemplos de diferencias en el comportamiento del condicional material y el “uso cotidiano”. Por ejemplo, una implicación cotidiana conlleva un condicional material pero no al revés. Por contraposición, la negación de un condicional material legitima la negación de una implicación cotidiana pero no a la inversa. También, si algo implica a una implicación cotidiana, queda garantizado un condicional material con otro condicional material como consecuente; pero, si una implicación implica algo, esto no garantiza un condicional material correspondiente con un condicional material como antecedente.

¿Qué más necesita una implicación material para ser implicación lógica, deductiva? Entre otras cosas, necesidad. Esta respuesta la dio C. I. Lewis desde la segunda década del siglo XX y quedó plasmada paradigmáticamente en 1932 cuando publicó, en colaboración con C. H. Langford, *Symbolic Logic.*

Para Lewis, la implicación material tenía “una ubicuidad más bien alarmante”. Un buen ejemplo de *Symbolic Logic*[11] es el siguiente:

> Tómese un número igual de afirmaciones verdaderas y falsas escogidas al azar y, sin importar de qué se traten, escríbanse en pedazos de papel y pónganse en un sombrero. Sáquense dos de éstos al azar. La probabilidad de que el que se saque primero implicará materialmente al segundo es 3/4. La probabilidad de que el segundo implicará materialmente al primero es 3/4. La probabilidad de que cada uno implicará materialmente al otro es 1/2. Y la probabilidad de que ninguno implicará materialmente al otro es 0.

Pero Lewis no trató de atacar a la implicación material. Desde 1912 escribió que las paradojas de la implicación material no son “ni oráculos misteriosos, ni grandes descubrimientos, ni gruesos absurdos”. El problema era que tampoco puede conformarse uno con ella, pues de que algo sea verdad no se deduce que se siga de cualquier cosa, ni de que sea falso se deduce que de ello se siga todo. Hay proposiciones tales que ni de **A** se deduce **B** ni de **B** se deduce **A**. La paradojas de la implicación material son aceptables para esa implicación, no para la implicación deductiva.

El problema, pues, no era que la implicación material fuera defectuosa en el sentido de errónea, sino en el sentido de carente. Lewis notó que la relación de implicación material rara vez, si es que alguna, tiene importancia lógica a menos que la acompañe la relación intensional usual de implicación. Lewis pidió que no sólo fuera cierto **A** y falso **B**, sino que tal relación de valores de verdad fuera necesaria. Cambiando toda implicación material por implicación *estricta*, es fácil comprobar que ninguna fórmula paradójica sobrevive.[12]

[11] C. I. Lewis y C. H. Langford, *Symbolic Logic*, New York: Dover Publ., 1959, p. 145.

[12] Cfr. *Ibid*., p. 495. Pero no echemos todavía las campanas al vuelo. Lewis diseña cinco sistemas de lógica modal (S1 a S5), cada uno de los cuales contiene al anterior. Pues bien, se puede probar que desde el sistema más débil de esos cinco, S1, aparecen paradojas de la implicación estricta: Si algo es necesario, entonces se

Lewis advierte que la lectura del condicional material como “implica” vuelve inválidos algunos teoremas de los *Principia*. Afortunadamente, existe un caso en el que el condicional material *siempre* puede ser leído como “implica con necesidad lógica”: cuando aparece como conectivo principal en un teorema. Lewis se compromete a que cuando el condicional material aparezca así, el teorema puede ser leído como una regla de inferencia aceptable. Sabemos que hay una estrecha relación entre el condicional de un sistema lógico y su noción metateórica de deducibilidad, usualmente plasmada en un “teorema de la deducción”. No toda implicación lógica es material ni toda implicación material es necesaria, pero toda fórmula derivable en lógica clásica en que la conectiva principal es una implicación material es un caso de implicación necesaria. En estos casos, la humilde implicación material puede legítimamente ser considerada implicación.

deduce de cualquier cosa y, si es imposible, cualquier cosa de deduce de él. Cabe notar que S1 no es el sistema más débil que permite inferir las paradojas de la implicación estricta pues en S0.5 aparecen.