Contraejemplos y Asignación de valores
Método sintáctico de obtención de formas normales conjuntivas y disyuntivas
Expansiones Booleanas

Raymundo Morado

Contraejemplos y Asignación de valores

- Buscar si se puede dar consistentemente valores a las proposiciones atómicas componentes que hagan verdaderas a todas las premisas pero falsa a la conclusión.
- Cada constante proposicional debe tener consistentemente el mismo valor de verdad.

Ejemplos

- Afirmación de consecuente:

$A \supset B, B \,/\, A$ Para invalidar esta forma, las premisas deben ser todas verdaderas y la conclusión falsa. ¿Es posible?

- Negación de antecedente: $A \supset B, \neg A \,/\, \neg B$
- ¿Cuántos renglones tiene la tabla de verdad de $P\&Q\&R\&S\&T\&U \supset VvWvXvYvZvT$?

Trabajo de equipo

- Aranza Olalde y Richie Yankovlev.
- Adolfo Ortiz y Alejandro Macario.
- Antonio Guillén y Bruno Alvarado.
- Karina Blanco y Ray Riande.
- Ángel Méndez y Suástegui.
- Daniel Bautista y Andrea López.
- Coraza y José Ramírez.
- Astros Jiménez y Ángel Sánchez.
- Alessandra Kirchhoff y Christian Mata.
- Yazmín Pinzón y Jareth Solares.
- Brenda Reyes y Alex García.

Fórmulas Disyuntivas y Fórmulas Conjuntivas

- Fórmulas Disyuntivas son aquellas fbfs en las que no aparecen conectivas si no son
  (1) las negaciones de fórmulas atómicas y/o (2) disyunciones inclusivas.
- Fórmulas Conjuntivas son aquellas fbfs en las que no aparecen conectivas si no son
  (1) las negaciones de fórmulas atómicas y/o (2) conjunciones.

	¿Fórmula Disyuntiva?	¿Fórmula Conjuntiva?
1. $[p \vee (q \wedge r)]$		
2. $[(q \vee r) \vee p]$		
3. $(q \wedge r) \wedge p$		
4. $(q \wedge r) \wedge p$		
5. $[p \vee \neg(q \vee r)]$		
6. $[\neg p \vee (\neg q \vee \neg r)]$		
7. $[(p \wedge \neg q) \wedge \neg r]$		
8. P		
9. $\neg p$		

FORMAS NORMALES

- Una fbf está en forma normal conjuntiva (FNC) cuando es una conjunción de fórmulas disyuntivas.

- Una fbf está en forma normal disyuntiva (FND) cuando es una disyunción de fórmulas conjuntivas.

¿Es “$[p \vee (q \wedge r)] \wedge [(q \vee r) \vee p]$” una FNC?

No, porque no es una conjunción de fórmulas diyuntivas (véase el primer conyunto).

¿Es “p $\wedge$ (q $\vee$ r)" una FNC?

- Sí, porque es una conjunción de fórmulas disyuntivas.

Forma normal conjuntiva (disyuntiva) completa

- Es aquella cuyos conyuntos (disyuntos) tienen ocurrencias de las mismas fórmulas atómicas.

¿Es “$p \wedge (q \vee r)$” una FNC completa?

- No, porque el primer conyunto no tiene una ocurrencia de q ni de r, y el segundo no tiene una ocurrencia de p.

¿Es "[p$\vee$(q$\wedge$r)] $\vee$ [(q$\wedge$r)$\wedge$p]" una FND completa?

- No, porque aunque tiene las mismas constantes en cada disyunto, no es una disyunción de conjunciones (véase el primer disyunto).

¿Es “$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$” una FND completa?

- No, porque el primer disyunto no tiene ocurrencia de r y el segundo disyunto no tiene ocurrencia de q, por lo que no es una FND completa.

¿Es "$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$" una FND?

- Sí, porque es una disyunción de fórmulas conjuntivas.

Método sintáctico de obtención de formas normales conjuntivas y disyuntivas

- Traducir las conectivas que no sean conjunción, disyunción inclusiva o negación.
- Si se quiere la forma completa, hacer expansiones booleanas.

Expansiones Booleanas

- Las usamos para completar variables.
- La expansión completa en FND tiene el mismo número de disyuntos que el número de líneas de la tabla de verdad si la fbf es tautológica y ningún caso si es contradictoria.
- La expansión completa en FNC tiene el mismo número de conyuntos que el número de líneas de la tabla de verdad si la fbf es contradictoria y ningún caso si es tautológica.

Leyes Expansivas Booleanas

Una Ley Expansiva Booleana es una equivalencia tautológica entre fórmulas que no tienen el mismo conjunto de constantes.

Por ejemplo, cualquier instancia de los siguientes esquemas es una Ley Expansiva Booleana.

LEB1$\vee$: $A \equiv [(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)]$

LEB2$\vee$: $A \equiv A \vee (A \wedge B)$

LEB3$\vee$: $A \equiv A \vee (B \wedge \neg B)$

LEB4$\vee$: $(A \vee \neg A) \equiv (B \vee \neg B)$

LEB1$\wedge$: $A \equiv [(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)]$

LEB2$\wedge$: $A \equiv A \wedge (A \vee B)$

LEB3$\wedge$: $A \equiv A \wedge (B \vee \neg B)$

LEB4$\wedge$: $(A \wedge \neg A) \equiv (B \wedge \neg B)$

LEB4$\vee$ y LEB4$\wedge$

¿Qué dice una tautología o una contradicción?

Lo mismo en todo mundo posible.

$$(A \vee \neg A) \equiv (B \vee \neg B)$$

$$(A \wedge \neg A) \equiv (B \wedge \neg B)$$

LEB3$\vee$ y LEB3$\wedge$

A veces añadir algo no añade nada.

$$A \equiv [A \vee (B \wedge \neg B)]$$

$$A \equiv [A \wedge (B \vee \neg B)]$$

LEB1$\vee$ y LEB1$\wedge$

Distribución de LEB3$\vee$ y LEB3$\wedge$:

$$A \equiv [A \vee (B \wedge \neg B)]$$
$$A \equiv [(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)]$$

$$A \equiv [A \wedge (B \vee \neg B)]$$
$$A \equiv [(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)]$$

LEB2$\vee$ y LEB2$\wedge$

$$A \equiv [A \vee (A \wedge B)]$$

$$A \equiv [A \wedge (A \vee B)]$$

Sobre cada equivalencia:

(1) Pruebe por tablas de verdad que son necesariamente equivalentes.

(2) Pruebe por deducción natural que se implican mutuamente.

¿Cómo transformar "$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$" en una forma normal completa?

{1}1. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ Premisa

{1}2. $\{[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge q) \wedge \neg r]\} \vee (p \wedge r)$ LEB1$\vee$ de 1

{1}3. $\{[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge q) \wedge \neg r]\} \vee$

$\{[(p \wedge r) \wedge q] \vee [(p \wedge r) \wedge \neg q]\}$ LEB1$\vee$ de 2

{1}4.$\{[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge q) \wedge \neg r]\} \vee [(p \wedge r) \wedge \neg q]$

Idempotencia de 3

¿Qué muestra la FND completa?

- La FND completa tiene tres casos de verdad, de ocho posibles.
- Por lo tanto, no es una tautología ni una contradicción sino una contingencia (es consistente pero no necesaria).

Obtención sintáctica de una FND

$$\neg\{ < [p \supset (\neg s\land q)]\supset \neg[(s\land q)\supset p]> \land \neg[\neg(r\land p)\land \neg(p\supset \neg s)]\}$$

$$\neg\{\neg<\neg[p\land\neg(\neg s\land q)]\land\neg\neg\neg[(s\land q)\land\neg p]> \land \neg[\neg(r\land p)\land\neg\neg(p\land\neg\neg s)]\}$$

$$\neg\{\neg<\neg[p\land\neg(\neg s\land q)]\land [\neg(s\land q)\lor\neg\neg p]> \land \neg[\neg(r\land p)\land (p\land s)]\}$$

$$\neg\neg<\neg[p\land\neg(\neg s\land q)]\land [\neg(s\land q)\lor p]> \lor\neg\neg[\neg(r\land p)\land (p\land s)]$$

$$<\neg[p\land\neg(\neg s\land q)]\land [\neg(s\land q) \lor p]> \lor [\neg(r\land p)\land (p\land s)]$$

$$<[\neg p\lor\neg(\neg\neg s\lor\neg q)]\land[(\neg s\lor\neg q) \lor p]> \lor [(\neg r\lor\neg p) \land (p\land s)]$$

$$<[\neg p\lor\neg(s\lor\neg q)]\land[(\neg s\lor\neg q) \lor p]> \lor [(p\land s) \land (\neg r\lor\neg p)]$$

$$<[\neg p\lor (\neg s\land\neg\neg q)]\land[(\neg s\lor\neg q) \lor p]> \lor[(p\land s) \land (\neg r\lor\neg p)]$$

$$<[\neg p\lor (\neg s\land q)]\land (\neg s\lor\neg q)> \lor<[\neg p\lor(\neg s\land q)]\land p>\lor[(p\land s\land\neg r)\lor(p\land s\land\neg p)]$$

$$<[\neg p\lor(\neg s\land q)]\land\neg s> \lor<[\neg p\lor(\neg s\land q)]\land\neg q> \lor<[\neg p\lor(\neg s\land q)]\land p>\lor[(p\land s\land\neg r)\lor(p\land s\land\neg p)]$$

$$<\neg s\land[\neg p\lor(\neg s\land q)]> \lor<\neg q\land[\neg p\lor(\neg s\land q)]> \lor<p\land[\neg p\lor(\neg s\land q)]>\lor (p\land s\land\neg r)\lor(p\land s\land\neg p)$$

$$(\neg s\land\neg p)\lor(\neg s\land\neg s\land q)\lor(\neg q\land\neg p)\lor(\neg q\land\neg s\land q)\lor(p\land\neg p)\lor(p\land\neg s\land q)\lor(p\land s\land\neg r)\lor(p\land s\land\neg p)$$

$$(\neg s\land\neg p)\lor(\neg s\land q)\lor(\neg q\land\neg p)\lor(p\land\neg s\land q)\lor(p\land s\land\neg r)$$

FND: $(\neg s\land\neg p)\lor(\neg s\land q)\lor(\neg q\land\neg p)\lor(p\land\neg s\land q)\lor(p\land s\land\neg r)$

Obtención sintáctica de una FND completa

$(\neg s \wedge \neg p) \quad \vee (\neg s \wedge q) \quad \vee (\neg q \wedge \neg p) \quad \vee (p \wedge \neg s \wedge q)$

$(\neg s \wedge \neg p \wedge q) \vee (\neg s \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee (\neg s \wedge q \wedge p) \vee (\neg s \wedge q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge \neg p \wedge s) \vee (\neg q \wedge \neg p \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg s \wedge q)$

$(\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg s)$

$(p \wedge q \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg s)$

$(p \wedge q \wedge \neg s) \vee \quad (\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee \quad (\neg p \wedge \neg q \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg s)$

Cuatro casos de verdad de ocho posibles: Contingente.

Datos importantes sobre las formas normales

- Dos fbfs son **equivalentes** cuando tienen el mismo valor de verdad.

- Son **lógicamente equivalentes** cuando tienen la misma forma normal completa.

- A se sigue proposicionalmente de B siempre y cuando todos los disyuntos de la FND completa de A estén en la de B.

- En otras palabras, siempre y cuando todos los conyuntos de la FNC completa de B estén en la de A.

- En este sentido, toda inferencia proposicional puede verse como una simplificación de la FNC completa (o como una adición de la FND completa) de las premisas.

- En ambos casos la conclusión debe ser un “debilitamiento” de las premisas.