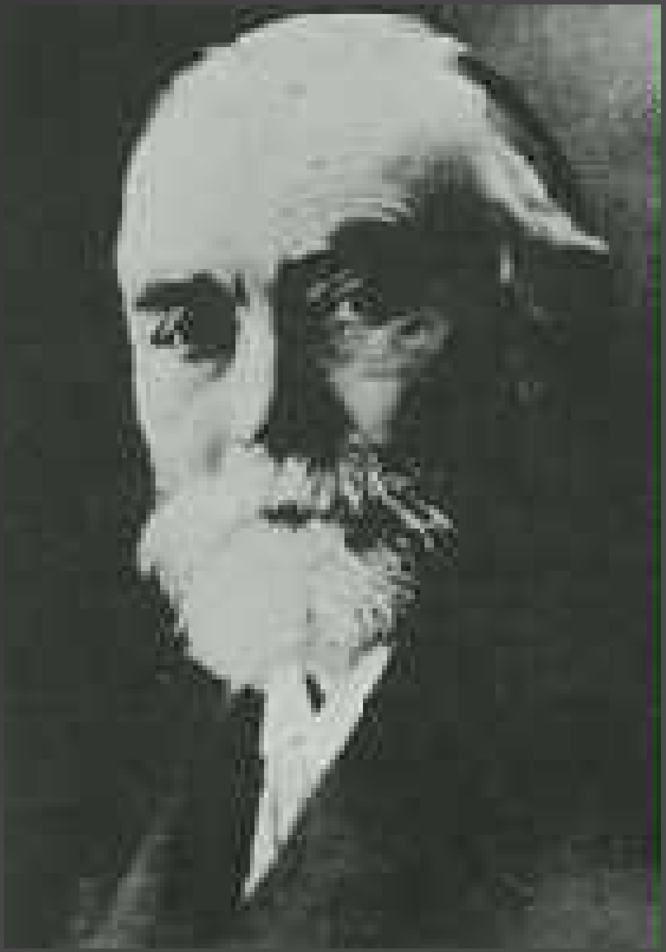
Un sistema axiomático proposicional

Raymundo Morado

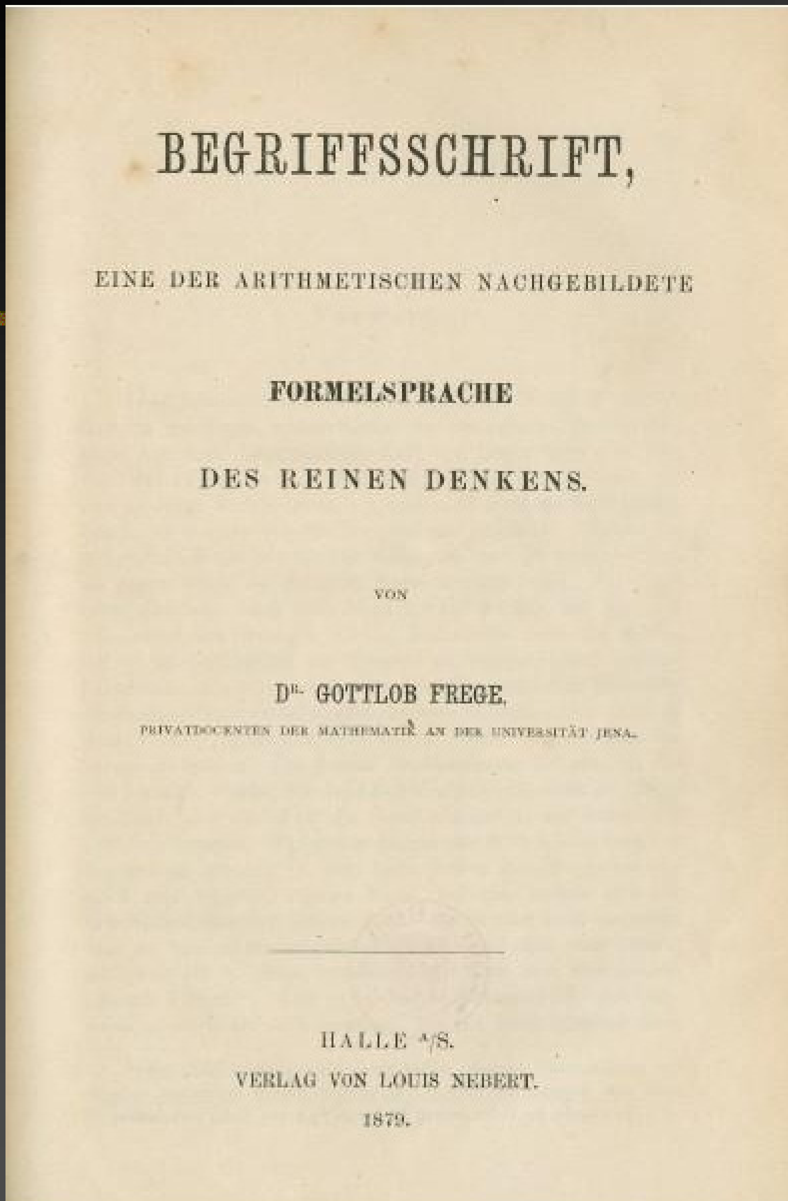
Friedrich Ludwig Gottlob Frege



(8 de noviembre de 1848 - 26 de julio de 1925)

¿Cuántos años vivió?

Pero, ¿y su acmé? ¿Qué edad tenía en 1879?


BEGRIFFSSCHRIFT,

EINE DER ARITHMETISCHEN NACHGEBILDETE

FORMELSPRACHE

DES REINEN DENKENS.

VON

Dr. GOTTLOB FREGE,

PRIVATDOCENTEN DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT JENA.

HALLE a/S.

VERLAG VON LOUIS NEBERT.

1879.

Copia en los *Bertrand Russell Archives* de McMaster University.

Si es una tarea de la filosofía ***romper el dominio de la palabra sobre la mente humana*** *al descubrir los engaños que sobre las relaciones de los conceptos surgen casi inevitablemente en el uso del lenguaje, al liberar al pensamiento de aquellos con que lo plaga la naturaleza de los medios lingüísticos de expresión, entonces mi conceptografía, más desarrollada para estos propósitos, podría ser un instrumento útil a los filósofos.*

Traducción de Hugo Padilla en fs-morente.filos.ucm.es/publicaciones/recursos/Frege-Conceptografia.pdf (mis negritas)

Wenn es eine Aufgabe der Philosophie ist, die Herrschaft des Wortes über den menschlichen Geist zu brechen, indem sie die Täuschungen aufdeckt, die durch den Sprachgebrauch über die Beziehungen der Begriffe oft fast unvermeidlich entstehen, indem sie den Gedanken von demjenigen befreit, womit ihn allein die Beschaffenheit des sprachlichen Ausdrucksmittels behaftet, so wird meine Begriffsschrift, für diese Zwecke weiter ausgebildet, den Philosophen ein brauchbares Werkzeug werden können. Freilich giebt auch sie, wie es bei einem äussern Darstellungsmittel wohl nicht anders möglich ist, den Gedanken nicht rein wieder; aber einerseits kann man diese Abweichungen auf das Unvermeidliche und Unschädliche beschränken, andrerseits ist schon dadurch, dass sie ganz andrer Art sind als die der Sprache eigenthümlichen, ein Schutz gegen eine einseitige Beeinflussung durch eines dieser Ausdrucksmittel gegeben.

http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65658c

Die Bedingtheit.

§ 5. Wenn A und B beurtheilbare**) Inhalte bedeuten, so giebt es folgende vier Möglichkeiten:

1) A wird bejaht und B wird bejaht;
2) A wird bejaht und B wird verneint;
3) A wird verneint und B wird bejaht;
4) A wird verneint und B wird verneint.

bedeutet nun das Urtheil, *dass die dritte dieser Möglichkeiten nicht stattfinde, sondern eine der drei andern.* Wenn

verneint wird, so besagt dies demnach, dass die dritte Möglichkeit stattfinde, dass also A verneint und B bejaht werde.

Die Verneinung.

§ 7. Wenn an der untern Seite des Inhaltsstriches ein kleiner senkrechter Strich angebracht wird, so soll damit der Umstand ausgedrückt werden, *dass der Inhalt nicht stattfinde*. So bedeutet z. B.

$$\vdash\!\neg\, A \quad :$$

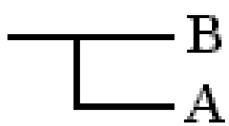
„A findet nicht statt". Ich nenne diesen kleinen senkrechten Strich den *Verneinungsstrich*. Der rechts vom Verneinungsstriche befindliche Theil des wagerechten Striches ist der Inhaltsstrich von A, der links vom Verneinungsstriche befindliche Theil dagegen ist der Inhaltsstrich der Verneinung von A. Ohne den Urtheilsstrich wird hier so wenig wie anderswo in der Begriffsschrift ein Urtheil gefällt.

$$-\!\neg\, A$$

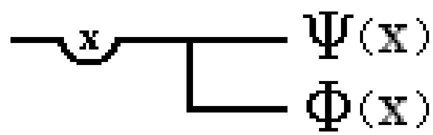
fordert nur dazu auf, die Vorstellung zu bilden, dass A nicht stattfinde, ohne auszudrücken, ob diese Vorstellung wahr sei.

Frege の 記号 n) と Whitehead-Russell による 書き替え n')

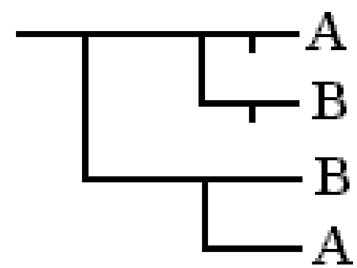
1)



2)



3)

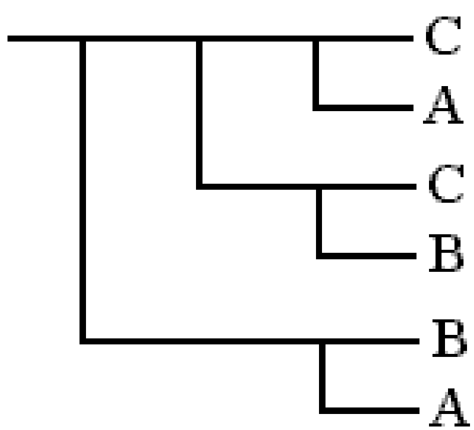


1') $A \supset B$

2') $(x): \Phi(x) . \supset . \Psi(x)$

3') $A \supset B . \supset . \sim B \supset \sim A$

4)



4') $A \supset B . B \supset C . \supset . A \supset C$

Sistema axiomático de Frege

§14 $A \supset (B \supset A)$

§15 $[A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset (A \supset C)]$

§16 $[A \supset (B \supset C)] \supset [B \supset (A \supset C)]$

§17 $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$

§18 $\neg\neg A \supset A$

§19 $A \supset \neg\neg A$

Modus Ponens y Substitución Uniforme.

Reglas derivadas

Por Substitución Uniforme, estos son principios generales.

Por Modus Ponens, si tengo A, tengo $(B \supset A)$ ("Paradoja" Positiva).

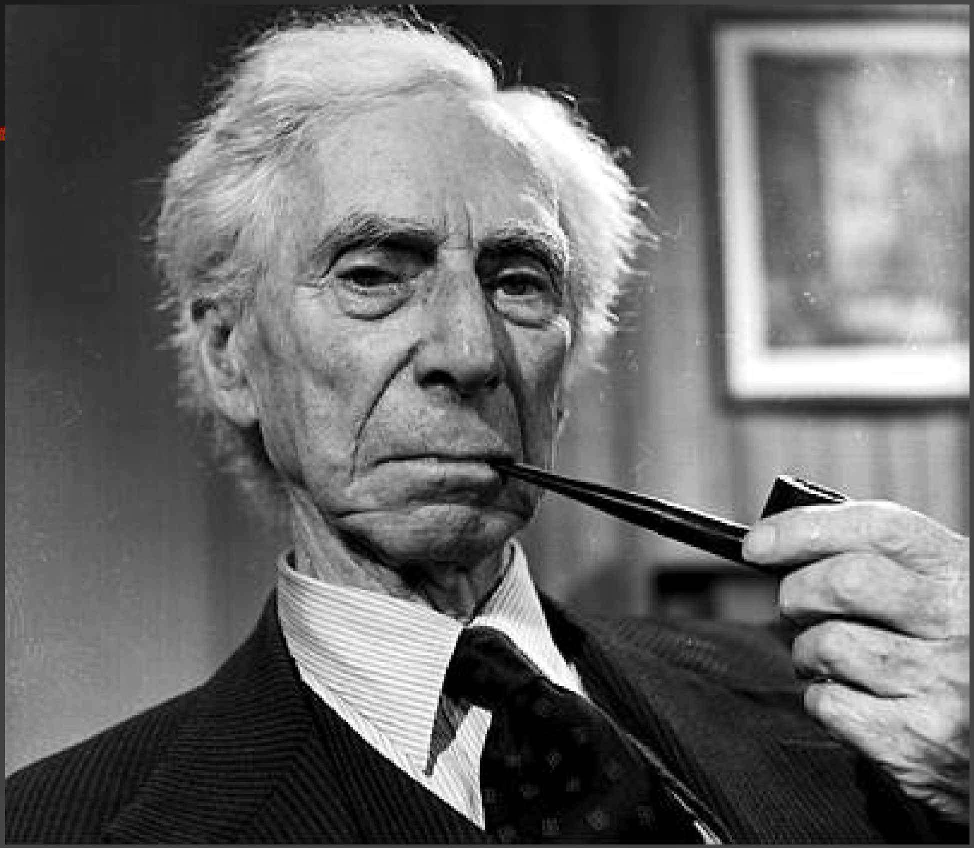
Si tengo $[A \supset (B \supset C)]$ y $(A \supset B)$, tengo $(A \supset C)$ ("Corte").

Si tengo $[A \supset (B \supset C)]$, tengo $[B \supset (A \supset C)]$ (Principio Conmutativo)

Si tengo $(A \supset B)$, tengo $(\neg B \supset \neg A)$ (Contraposición/Transposición)

Si tengo $\neg\neg A$, tengo A; si tengo A, tengo $\neg\neg A$ (Doble Negación).

Bertrand Arthur William Russell



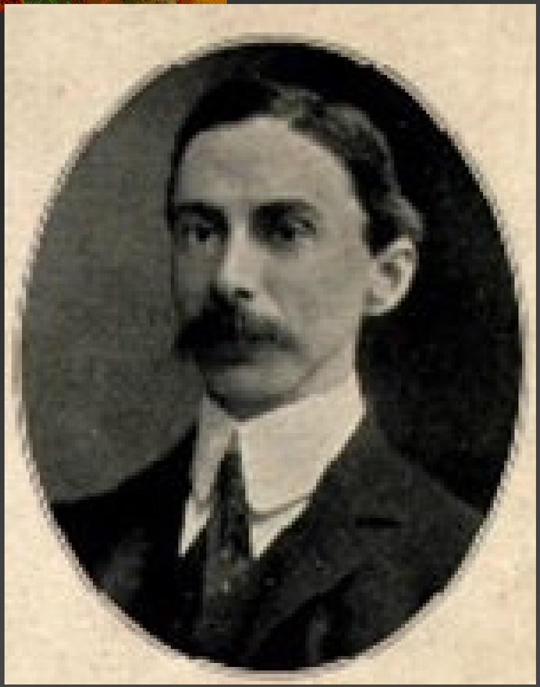
(18 de mayo de 1872 – 2 de febrero de 1970)

¿Cuántos años vivió?

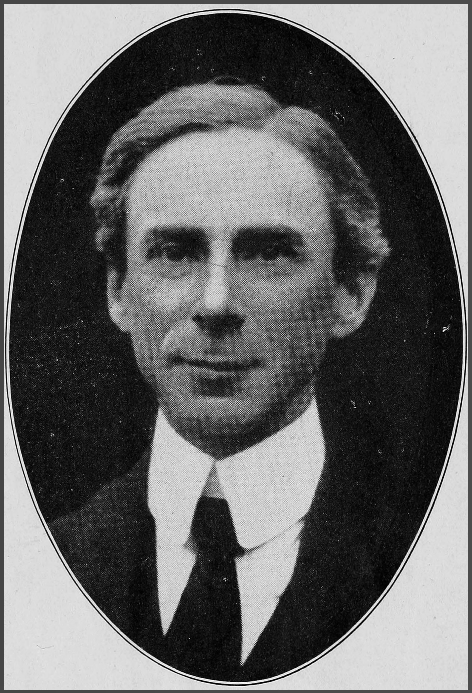
Pero, ¿y su acmé? ¿Qué edad tenía en 1910?

Bertie

1894



1907



1916

PRINCIPIA MATHEMATICA

BY

ALFRED NORTH WHITEHEAD, Sc.D., F.R.S.
Fellow and late Lecturer of Trinity College, Cambridge

AND

BERTRAND RUSSELL, M.A., F.R.S.
Lecturer and late Fellow of Trinity College, Cambridge

VOLUME I

Cambridge
at the University Press
1910

Definiciones a partir de ¬ y ∨ en *Principia Mathematica*

*1.01 $(p \supset q) =_{df} (\neg p \vee q)$

*3.01 $(p \wedge q) =_{df} \neg(\neg p \vee \neg q)$

*4.01 $(p \equiv q) =_{df} [(p \supset q) \wedge (q \supset p)]$

El cálculo proposicional en *Principia*

AXIOMAS:

- $(p \vee p) \supset p$ "Tautología"
- $q \supset (p \vee q)$ "Adición" (*1.3)
- $(p \vee q) \supset (q \vee p)$ "Permutación"
- $[p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p \vee r)]$ "Asociación"
- $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$ "Suma"

REGLAS (Estrategias):

- Substitución Uniforme y
- Modus Ponens (*1.11).

Primer Teorema de *PM*

{ } 1.$(p \vee p) \supset p$	Axioma (Tautología o "Taut")
{ } 2.$(\neg p \vee \neg p) \supset \neg p$	Substitución Uniforme de p con ¬p en 1
{ } 3.$(p \supset \neg p) \supset \neg p$	Por definición *1.01 de "⊃" en 2

Quod Erat Demostrandum

***2·01.** $\vdash : p \supset {\sim}p \,.\supset.\, {\sim}p$

This proposition states that, if p implies its own falsehood, then p is false. It is called the "principle of the *reductio ad absurdum*," and will be referred to as 'Abs.'* The proof is as follows (where "*Dem.*" is short for "demonstration"):

Dem.

$$\left[\text{Taut}\,\frac{\sim p}{p}\right] \quad \vdash : {\sim}p \vee {\sim}p \,.\supset.\, {\sim}p \qquad (1)$$

$$[(1).(*1{\cdot}01)] \quad \vdash : p \supset {\sim}p \,.\supset.\, {\sim}p$$

***2·02.** $\vdash : q \,.\supset.\, p \supset q$

Dem.

$$\left[\text{Add}\,\frac{\sim p}{p}\right] \quad \vdash : q \,.\supset.\, {\sim}p \vee q \qquad (1)$$

$$[(1).(*1{\cdot}01)] \quad \vdash : q \,.\supset.\, p \supset q$$

***2·03.** $\vdash : p \supset {\sim}q \,.\supset.\, q \supset {\sim}p$

Dem.

$$\left[\text{Perm}\,\frac{\sim p, \sim q}{p,\ \ q}\right] \quad \vdash : {\sim}p \vee {\sim}q \,.\supset.\, {\sim}q \vee {\sim}p \qquad (1)$$

$$[(1).(*1{\cdot}01)] \quad \vdash : p \supset {\sim}q \,.\supset.\, q \supset {\sim}p$$

***2·04.** $\vdash :. p \,.\supset.\, q \supset r : \supset : q \,.\supset.\, p \supset r$

Dem.

$$\left[\text{Assoc}\,\frac{\sim p, \sim q}{p,\ \ q}\right] \quad \vdash :. {\sim}p \vee ({\sim}q \vee r) \,.\supset.\, {\sim}q \vee ({\sim}p \vee r) \qquad (1)$$

$$[(1).(*1{\cdot}01)] \quad \vdash :. p \,.\supset.\, q \supset r : \supset : q \,.\supset.\, p \supset r$$

***2·05.** $\vdash :. q \supset r \,.\supset : p \supset q \,.\supset.\, p \supset r$

Dem.

$$\left[\text{Sum}\,\frac{\sim p}{p}\right] \quad \vdash :. q \supset r \,.\supset : {\sim}p \vee q \,.\supset.\, {\sim}p \vee r \qquad (1)$$

$$[(1).(*1{\cdot}01)] \quad \vdash :. q \supset r \,.\supset : p \supset q \,.\supset.\, p \supset r$$

***2·06.** $\vdash :. p \supset q \,.\supset : q \supset r \,.\supset.\, p \supset r$

Dem.

$$\left[\text{Comm}\,\frac{q \supset r,\ p \supset q,\ p \supset r}{p,\qquad q,\qquad r}\right] \quad \vdash :: q \supset r \,.\supset : p \supset q \,.\supset.\, p \supset r :. \supset :. p \supset q \,.\supset : q \supset r \,.\supset.\, p \supset r \qquad (1)$$

$$[*2{\cdot}05] \quad \vdash :. q \supset r \,.\supset : p \supset q \,.\supset.\, p \supset r \qquad (2)$$

$$[(1).(2).*1{\cdot}11] \quad \vdash :. p \supset q \,.\supset : q \supset r \,.\supset.\, p \supset r$$

In the last line of this proof, "(1) . (2) . *1·11" means that we are inferring in accordance with *1·11, having before us a proposition, namely $p \supset q \,.\supset : q \supset r \,.\supset.\, p \supset r$, which, by (1), is implied by $q \supset r \,.\supset : p \supset q \,.\supset.\, p \supset r$, which, by (2), is true. In general, in such cases, we shall omit the reference to *1·11.

* There is an interesting historical article on this principle by Vailati, "A proposito d' un passo del Teeteto e di una dimostrazione di Euclide," *Rivista di Filosofia e scienze affine*, 1904.

The above two propositions will both be referred to as the "principle of the syllogism" (shortened to "Syll"), because, as will appear later, the syllogism in Barbara is derived from them.

***2·07.** $\vdash : p \,.\supset.\, p \vee p \quad \left[*1{\cdot}3\,\frac{p}{q}\right]$

Here we put nothing beyond "$*1{\cdot}3\,\frac{p}{q}$," because the proposition to be proved is what *1·3 becomes when p is written in place of q.

***2·08.** $\vdash . p \supset p$

Dem.

$$\left[*2{\cdot}05\,\frac{p \vee p,\ p}{q,\quad r}\right] \quad \vdash :: p \vee p \,.\supset.\, p : \supset :. p \,.\supset.\, p \vee p : \supset .\, p \supset p \qquad (1)$$

$$[\text{Taut}] \quad \vdash : p \vee p \,.\supset.\, p \qquad (2)$$

$$[(1).(2).*1{\cdot}11] \quad \vdash :. p \,.\supset.\, p \vee p : \supset .\, p \supset p \qquad (3)$$

$$[*2{\cdot}07] \quad \vdash : p \,.\supset.\, p \vee p \qquad (4)$$

$$[(3).(4).*1{\cdot}11] \quad \vdash . p \supset p$$

***2·1.** $\vdash . {\sim}p \vee p \quad [*2{\cdot}08 . (*1{\cdot}01)]$

***2·11.** $\vdash . p \vee {\sim}p$

Dem.

$$\left[\text{Perm}\,\frac{\sim p, p}{p,\ q}\right] \quad \vdash : {\sim}p \vee p \,.\supset.\, p \vee {\sim}p \qquad (1)$$

$$[(1).*2{\cdot}1.*1{\cdot}11] \quad \vdash . p \vee {\sim}p$$

This is the law of excluded middle.

***2·12.** $\vdash . p \supset {\sim}({\sim}p)$

Dem.

$$\left[*2{\cdot}11\,\frac{\sim p}{p}\right] \quad \vdash . {\sim}p \vee {\sim}({\sim}p) \qquad (1)$$

$$[(1).(*1{\cdot}01)] \quad \vdash . p \supset {\sim}({\sim}p)$$

***2·13.** $\vdash . p \vee {\sim}\{{\sim}({\sim}p)\}$

This proposition is a lemma for *2·14, which, with *2·12, constitutes the principle of double negation.

Dem.

$$\left[\text{Sum}\,\frac{\sim p, \sim\{\sim(\sim p)\}}{q,\qquad r}\right] \quad \vdash :. {\sim}p \,.\supset.\, {\sim}\{{\sim}({\sim}p)\} \,.\supset : p \vee {\sim}p \,.\supset.\, p \vee {\sim}\{{\sim}({\sim}p)\} \qquad (1)$$

$$\left[*2{\cdot}12\,\frac{\sim p}{p}\right] \quad \vdash : {\sim}p \,.\supset.\, {\sim}\{{\sim}({\sim}p)\} \qquad (2)$$

$$[(1).(2).*1{\cdot}11] \quad \vdash : p \vee {\sim}p \,.\supset.\, p \vee {\sim}\{{\sim}({\sim}p)\} \qquad (3)$$

$$[(3).*2{\cdot}11.*1{\cdot}11] \quad \vdash . p \vee {\sim}\{{\sim}({\sim}p)\}$$

$*2\cdot01$. $\vdash : p \supset \sim p . \supset . \sim p$

This proposition states that, if p implies its own falsehood, then p is false. It is called the "principle of the *reductio ad absurdum*," and will be referred to as "Abs."* The proof is as follows (where "*Dem.*" is short for "demonstration"):

Dem.

$$\left[\text{Taut}\,\frac{\sim p}{p}\right] \quad \vdash : \sim p \vee \sim p . \supset . \sim p \qquad (1)$$

$$[(1).(*1\cdot01)] \quad \vdash : p \supset \sim p . \supset . \sim p$$

William Kneale notó en *The Journal of Hellenic Studies*, Vol. 77, Part 1 (1957), pp. 62-66, que podemos reconstruir un argumento de la "Invitación a la Filosofía" de Aristóteles como un dilema constructivo. Y que, como vimos en las expansiones booleanas, podemos omitir las premisas tautológicas, por lo que obtenemos la Ley de Clavius:

Si debemos filosofar, debemos filosofar.	(Identidad)
Si no debemos filosofar, debemos filosofar.	($\neg p \supset p$)
<u>Debemos filosofar o no debemos filosofar.</u>	(Tercio excluso)
Debemos filosofar.	p

Christoph Clavius (1538 –1612)

Notó que en varios lugares Euclides razona que si algo lleva a su negación debe ser falso. A esta forma de razonar la llamó "admirabilis" pues supone justo lo opuesto de lo que se quiere probar.

Su condicional asociado es
$(p \supset \neg p) \supset \neg p$

"Ley de Clavius"

"Consequentia mirabilis"

Forma de "Reductio ad Absurdum"

Notas

- En vez de paréntesis, se marcan las conectivas principales con más puntitos.
- Las justificaciones aparecen a la izquierda.
- No se señalan dependencias porque solamente escribimos verdades lógicas.
- Los axiomas y teoremas son introducidos ya con substituciones uniformes.

$\Gamma \vdash$ A

A es *consecuencia sintáctica* de un conjunto Γ (se dice que A es *deducible* o *probada* a partir del conjunto Γ de hipótesis o premisas) si es la última fórmula en alguna secuencia de fórmulas bien formadas que son,

1. o bien axiomas,
2. o bien miembros de Γ,
3. o bien consecuencia directa de fórmulas previas en la secuencia, mediante una estrategia o regla de inferencia.

Por ello, la noción de prueba depende del sistema particular que se use.

Prueba (sin premisas)

- Secuencia de fórmulas bien formadas que son, o bien axiomas, o bien consecuencia directa de fórmulas previas en la secuencia mediante una estrategia o regla de inferencia aceptada (consecuencia sintáctica).
- Es prueba en cada sistema en que esas fórmulas estén bien formadas, y que incluya esos axiomas y estrategias.

Teorema

- Última fórmula en alguna prueba (sin premisas), y/o cualquier línea sin dependencias.
- Es teorema de todos los sistemas en que haya alguna prueba suya.

Teorema y estrategias derivados

- Es normal que un sistema axiomático permita emplear cada teorema ya demostrado como si fuera un nuevo axioma o una nueva estrategia.
- Este uso no es esencial pues puede verse como una mera abreviatura de la prueba completa. Por ejemplo, en *2.06 (¡De donde se obtiene el modo aristotélico de Barbara!), se invoca "Comm" ("Commutative Principle") que es un teorema probado anteriormente, el *2.04 (¡y que es uno de los axiomas de Frege!).

$\ast 2\cdot 04.\ \vdash :.\, p \,.\, \supset .\, q \supset r : \supset : q \,.\, \supset .\, p \supset r$

Dem.

$$\left[\text{Assoc}\,\frac{\sim p,\ \sim q}{p,\quad q}\right] \vdash :.\, \sim p \vee (\sim q \vee r) \,.\, \supset .\, \sim q \vee (\sim p \vee r) \qquad (1)$$

$$[(1).(\ast 1\cdot 01)] \quad \vdash :.\, p \,.\, \supset .\, q \supset r : \supset : q \,.\, \supset .\, p \supset r$$

$\ast 2\cdot 05.\ \vdash :.\, q \supset r \,.\, \supset : p \supset q \,.\, \supset .\, p \supset r$

Dem.

$$\left[\text{Sum}\,\frac{\sim p}{p}\right] \vdash :.\, q \supset r \,.\, \supset : \sim p \vee q \,.\, \supset .\, \sim p \vee r \qquad (1)$$

$$[(1).(\ast 1\cdot 01)] \vdash :.\, q \supset r \,.\, \supset : p \supset q \,.\, \supset .\, p \supset r$$

$\ast 2\cdot 06.\ \vdash :.\, p \supset q \,.\, \supset : q \supset r \,.\, \supset .\, p \supset r$

Dem.

$$\left[\text{Comm}\,\frac{q \supset r,\ p \supset q,\ p \supset r}{p,\quad q,\quad r}\right] \vdash ::\, q \supset r \,.\, \supset : p \supset q \,.\, \supset .\, p \supset r :.$$

$$\supset :.\, p \supset q \,.\, \supset : q \supset r \,.\, \supset .\, p \supset r \qquad (1)$$

$$[\ast 2\cdot 05] \quad \vdash :.\, q \supset r \,.\, \supset : p \supset q \,.\, \supset .\, p \supset r \qquad (2)$$

$$[(1).(2).\ast 1\cdot 11] \quad \vdash :.\, p \supset q \,.\, \supset : q \supset r \,.\, \supset .\, p \supset r$$

Observaciones finales

- *¿Cuál es la diferencia entre un sistema de deducción natural y uno axiomático, si ambos usan reglas? La presencia de axiomas (siempre) y el uso de reglas más "naturales" (no siempre).*
- *En vez de Axiomas y substitución uniforme podemos (ojo, en sistemas axiomáticos) usar Esquemas Axiomáticos que representan, cada uno, infinitos axiomas.*
- *Es crucial usar correctamente números de línea, justificaciones y dependencias para que la lógica sea científica.*

Un sistema es un lenguaje más un cálculo y su semántica.

Un cálculo puede ser axiomático y tener:

Axiomas o Esquemas Axiomáticos (verdades lógicas)

Números de línea (nombres para sus fbfs)

Justificaciones (lo que lo hace científico)

Dependencias (lo que lo hace honesto)

Pruebas como secuencias (demostraciones)

Teoremas y substitución uniforme (generalidad)

Estrategias derivadas (leyes lógicas)

Ejercicios para hacer en equipo

- Parafrasear las demostraciones *2.01 a *2.13, usando nuestro propio idiolecto.
- Hacer las pruebas ustedes mismos sin ver las pruebas de *Principia*, pero señalando dependencias y justificaciones. Después, compararlas y decir cuál fue más elegante.
- Discutir la importancia filosófica de cada uno de esos teoremas.