Nociones básicas de metalógica

Raymundo Morado

Sistema Lógico

- Sintaxis:
  - Lenguaje
    - Vocabulario
    - Regla(s) de formación
  - Cálculo (Teoría de la demostración)
    - Tal vez axiomas
    - Regla(s) de transformación
- Semántica (Teoría de modelos)

La metalógica

- Prueba metateoremas (verdades) sobre un sistema lógico. Por ejemplo:
- Expresividad del lenguaje
- Definibilidad de propiedades
- Corrección, completud, decidibilidad del cálculo con respecto a la semántica
- Independencia de las reglas o axiomas

Interpretaciones y modelos

- Una interpretación es asignar valores de verdad a las fórmulas atómicas del lenguaje; las moleculares reciben valor de verdad como corresponde a sus conectivas.
- Un modelo para un conjunto Γ de fbfs es una interpretación de los términos no lógicos de las fbfs de Γ, especialmente una interpretación bajo la cual son verdaderas.
- La fórmula F del lenguaje L es verdadera en la interpretación I de L si y sólo si I asigna a F el valor verdad.
- Por ejemplo, para 4 símbolos proposicionales distintos puede haber 16 tipos diferentes de interpretaciones.

Satisfacibilidad

Un conjunto Γ de fbfs es satisfacible si tiene un modelo, es decir, una interpretación bajo la cual todos sus miembros son verdaderas.

Un conjunto Γ tiene consistencia semántica si es satisfacible.

Un conjunto Γ tiene consistencia sintáctica si no es posible derivar una contradicción de él en el sistema.

Ejercicio: Satisfacción

Una interpretación de los elementos no lógicos de una fbf α **satisface** a α si y sólo si α es verdadera bajo esa interpretación. *Escriba una frase en español que, en la palabras inmortales de Mick Jagger, no pueda obtener satisfacción.*

Ejercicio: Consistencia

Un conjunto Γ de fbfs es **sintácticamente consistente** si y sólo si no hay una fbf tal que ella y su negación son consecuencias sintácticas de Γ. Un sistema es **sintácticamente consistente** si y sólo si no hay un fbf tal que ella y su negación son teoremas del sistema. Un conjunto Γ de fbfs es **semánticamente consistente** si y sólo si no hay una fbf tal que ella y su negación son consecuencias semánticas de Γ. Un sistema es **semánticamente consistente** si y sólo si no hay un fbf tal que ella y su negación son válidas en el sistema. *¿Es el conjunto de todas las contingencias proposicionales semántica o sintácticamente consistente? ¿Cómo lo sabe?*

Consecuencia semántica clásica

B es consecuencia semántica de {A} si y sólo si en ninguna interpretación es A verdad y B falso.

El conjunto vacío {} es modelado por cualquier interpretación.

A es consecuencia semántica de {A}.

Si A es consecuencia semántica de Γ, entonces A es consecuencia semántica de $\Gamma \cup \Delta$.

Si A es consecuencia semántica de Γ, y B de {A}, entonces B es consecuencia semántica de Γ.

Si A es una fórmula lógicamente válida, entonces A es consecuencia semántica de cualquier Γ.

Si A es consecuencia semántica de Γ, y $A \supset B$ es consecuencia semántica de Γ, entonces B es consecuencia semántica de Γ.

Consecuencia lógica

La consecuencia lógica puede ser sintáctica (derivabilidad) o semántica (implicación).

X es consecuencia sintáctica de Γ (X se deriva de Γ) ssi hay una prueba de X a partir de Γ en el sistema. $\Gamma \vdash X$

X es consecuencia semántica de Γ (se sigue, $X \in Cn(\Gamma)$) ssi todo modelo de Γ es modelo de $\{X\}$. $\Gamma \models X$

Ejercicio:
Consecuencia lógica sintáctica

El conjunto de fórmulas bien formadas (fbfs) Γ tiene a la fbf α como **consecuencia lógica sintáctica en el sistema S** si y sólo si de Γ podemos derivar en S a α, es decir, si hay una secuencia de fbfs en la que aparezca α y toda otra fórmula en la secuencia es parte de Γ, axioma de S, o resultado de aplicar una estrategia de inferencia de S a fórmulas previas de la secuencia. *¿Es todo axioma de Principia Mathematica consecuencia lógica sintáctica del conjunto vacío en Principia Mathematica misma? ¿Por qué?*

Ejercicio:
Consecuencia lógica semántica

Γ tiene a α como **consecuencia lógica semántica** si y sólo si cualquier interpretación de los elementos no lógicos que haga verdadera a cualquier fórmula en Γ, también hace verdadera a α. *Si Γ es un conjunto vacío de fbfs, ¿puede tener alguna consecuencia lógica semántica? ¿Por qué?*

Axiomas de Alfred Tarski para la Consecuencia Lógica Clásica

Siendo S el conjunto de todas las oraciones, y $\Gamma \subseteq S$

[1] $|S| \leq \aleph_0$.

[2] $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma) \subseteq S$.

[3] $Cn(Cn(\Gamma)) = Cn(\Gamma)$.

[4] $Cn(\Gamma) = \Sigma_{\Delta \subseteq \Gamma \,\&\, |\Delta| < \aleph 0}\, Cn(\Delta)$.

[5] $(\exists\gamma\in S)\ Cn(\{\gamma\}) = S$.

Validez lógica

Una fórmula es lógicamente válida si es un teorema (sintácticamente válida) o una verdad lógica (semánticamente válida).

Una fórmula es un teorema si es consecuencia sintáctica del conjunto vacío.

Una fórmula es una verdad lógica si es verdadera bajo cualquier interpretación.

Ejercicio: Teorema y Prueba

α es **teorema** del sistema S si y sólo si α es la fórmula de una línea en S sin dependencias. *¿Es* "$(p \vee p) \supset p$" *un teorema en Principia Mathematica? ¿Por qué?*

Una **prueba** en el sistema S es una secuencia de fbfs que son, o bien axiomas de S, o bien consecuencia directa de fórmulas previas en la secuencia mediante una estrategia o regla de inferencia de S. *¿Es* "{ } 1. $(p \vee p) \supset p$ Taut." *una prueba en Principia Mathematica (con la notación modernizada)?¿Por qué?*

Validez lógica de fórmulas y argumentos

Una fbf es **lógicamente válida** si y sólo si es verdadera bajo cualquier interpretación de sus elementos no lógicos. *Diga dónde está el error en el siguiente razonamiento: "Todo puede ser interpretado como falso. Por lo tanto ninguna oración es lógicamente válida."*

Un argumento es **lógicamente válido** si y sólo si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas. *¿Es lógicamente válido el argumento "Pienso; por lo tanto existo"? ¿Por qué?*

Decidibilidad

- Un sistema lógico es decidible si para toda fbf de su lenguaje, hay un algoritmo que decide si es teorema o no.

Ejercicio: Decidibilidad del sistema

Un sistema S es **decidible** si y sólo si hay un método efectivo para decidir si una fbf es teorema de S. *¿Es la lógica proposicional decidible? ¿Cómo lo sabe? ¿Puede un sistema ser completo sin ser decidible o decidible sin ser completo? ¿Por qué?*

Ejercicio: Decidibilidad en el sistema

Un conjunto Γ de fbfs es **decidible** en el sistema S si y sólo si hay un método efectivo para decidir si cada fbf de Γ es teorema de S. *¿Es el conjunto de las contingencias proposicionales decidible en la lógica proposicional? ¿Cómo lo sabe?*

Independencia

- Un axioma es independiente si no es un teorema del resto del sistema.
- Una regla es independiente si permite transformaciones que el resto del sistema no permite.

Ejercicio: Independencia

Una fbf es **independiente** de otras en un sistema S si no es consecuencia sintáctica dde ellas. *¿Cuál de las siguientes fbfs es independiente de las otras en lógica proposicional clásica?*

- *(a)* $p \vee \neg p$
- *(b)* $p \vee [(p \equiv q) \wedge q]$
- *(c)* $\neg(p \wedge \neg p)$
- *(d)* $m \supset m$
- (e) $(g \supset h) \vee (h \supset g)$

Completud y corrección

- Un sistema lógico es completo si todas las fórmulas semánticamente válidas expresables en su lenguaje son sintácticamente válidas. $\models X \Rightarrow \vdash X$
- Un sistema lógico es correcto si todas las fórmulas sintácticamente válidas expresables en su lenguaje son semánticamente válidas. $\vdash X \Rightarrow \models X$

Ejercicio:
Completud y corrección de sistemas

Un sistema S es **completo** si y sólo si toda fbf de S que sea lógicamente válida es teorema de S. *Para que un sistema S sea completo, ¿debe poder probar toda verdad lógica, expresable o no en el lenguaje de S?¿Por qué?*

Un sistema S es **correcto** si y sólo si toda fbf que sea teorema de S es lógicamente válida y toda estrategia de inferencia de S lleva solamente a consecuencias lógicas semánticas. *Para que un sistema S sea correcto, ¿todas sus fbfs deben ser lógicamente válidas? ¿Por qué?*

Ejercicio: Corrección de reglas

Una estrategia es **lógicamente correcta** si y sólo si toda interpretación de los elementos no lógicos que satisfaga a las premisas satisface también a la conclusión. *¿Es una estrategia lógicamente correcta la siguiente: ¿Si algo es completamente rojo, entonces no es completamente verde"? ¿Por qué? (Note que esta estrategia nunca llevará de verdad a falsedad.)*

Equivalencias entre métodos

	Tablas de verdad	Deducción Natural	Método Axiomático
¿Puede probar cualquier tautología?	Sí	Sí	Sí
¿Solamente prueba algo que sea verdad lógica?	Sí	Sí	Sí
¿Valida solamente formas infalibles de razonar?	Sí	Sí	Sí
¿Garantiza encontrar una solución mecánicamente?	Sí	No	No
¿Puede prescindir de axiomas?	Sí	Sí	No
¿Alcanza para lógica de relaciones?	No	Sí	Sí
¿Facilita la metalógica?	Sí	No	Sí
¿Funciona con un par de principios?	Sí	No	Sí
¿Imita el pensamiento humano?	No	Sí	No

Trabajo de equipo

1. Aranza Olalde y Richie Yankovlev.
2. Adolfo Ortiz y Alejandro Macario.
3. Antonio Guillén y Bruno Alvarado.
4. Karina Blanco y Ray Riande.
5. Ángel Méndez y Suástegui.
6. Daniel Bautista y Andrea López.
7. Coraza y José Ramírez.
8. Astros Jiménez y Ángel Sánchez.
9. Alessandra Kirchhoff y Christian Mata.
10. Yazmín Pinzón y Jareth Solares.
11. Brenda Reyes y Alex García.