Algunos otros métodos de prueba

Raymundo Morado

Árboles de verdad

Enrique Montero
Nayeli Rodríguez
Rodolfo Vázquez
Raymundo Morado

Temario

1. Árboles de Verdad para probar:

1.1 validez de un argumento

1.2 contradictoriedad, tautologicidad y contingencia de una fórmula

1.3 validez de un argumento por tautologicidad de su condicional asociado

2. Equivalencia entre árboles y tablas

Árboles de verdad

- Árboles de verdad de Raymond Smullyan.
- El modo de presentación de un árbol es vertical y su trayectoria es hacia abajo, pues así es como escribimos en nuestra cultura.
- Hay fórmulas moleculares que –como las ramas de un árbol– siguen una trayectoria.
- Hay fórmulas moleculares que –como las ramas de un árbol– se bifurcan (pues son binarias).

Método de validez: árboles de verdad

- **Procedimiento**:

1. Ordenar las premisas y la conclusión como si se fuera a aplicar deducción natural, pero sin dependencias.
2. Negar la conclusión en el siguiente paso y justificarla como hipótesis:

Ejemplo:

1.$p \supset q$ premisa

2.p premisa $/ \therefore q$

3. $\neg q$ hipótesis

3. Construya una lista o una bifurcación conforme a las siguientes estrategias:

L $\wedge$	$A \wedge B$ A B	B $\neg \wedge$	$\neg (A \wedge B)$ $\neg A \qquad \neg B$
B $\supset$	$A \supset B$ $\neg A \qquad B$	L $\neg \supset$	$\neg (A \supset B)$ A $\neg B$
B $\vee$	$A \vee B$ $A \qquad B$	L $\neg \vee$	$\neg (A \vee B)$ $\neg A$ $\neg B$
B $\equiv$	$A \equiv B$ $A \qquad \neg A$ $B \qquad \neg B$	B $\neg \equiv$	$\neg (A \equiv B)$ $\neg A \qquad A$ $B \qquad \neg B$
B $\not\equiv$	$A \not\equiv B$ $\neg A \qquad A$ $B \qquad \neg B$	B $\neg \not\equiv$	$\neg (A \not\equiv B)$ $A \qquad \neg A$ $B \qquad \neg B$

Ejemplos

Si una fórmula tiene como conectiva principal una disyunción exclusiva, una equivalencia material, sus respectivas negaciones, un condicional, o una disyunción inclusiva, entonces se bifurca. Ejemplo:

a)

1. $p \supset q$
2. p $\quad / \therefore q$

3. $\neg q$ hipótesis

4. $\neg p$ 5. q $\quad B\supset$ de 1

Si una fórmula tiene como conectiva principal una conjunción, la negación de una disyunción inclusiva, o la negación de un condicional, entonces en distintos pasos se simplifica enlistando. Ejemplo:

b)

1. $\neg p \wedge \neg q$ $\quad / \therefore r$

2. $\neg r$ hipótesis
3. $\neg p$ $L\wedge$ de 1
4. $\neg q$ $L\wedge$ de 1

JUSTIFICACIÓN DE UN ÁRBOL

Bifurcación

1. $p \supset q$
2. $p \quad / \therefore q$
3. $\neg q$ hipótesis

4. $\neg p$ 5. q $B\supset$ de 1

Lista

1. $\neg(p \vee q)$
2. $r \vee q \quad / \therefore r$
3. $\neg r$ hipótesis
4. $\neg p$ $L\neg\vee$ de 1
5. $\neg q$ $L\neg\vee$ de 1

REGLA DE CIERRE: R.C.

Si eventualmente encontramos una contradicción, es decir, una fórmula y su negación en distintos pasos de una trayectoria, se cierra esa trayectoria de inmediato con la regla de cierre (R.C).

Cuando eventualmente se tienen cerradas todas las ramas, se dice que el argumento es válido, y cuando no, no es válido.

1. $p \supset q$
2. $p \quad / \therefore q$
3. $\neg q$ hipótesis

4. $\neg p$	5. q	B$\supset$ de 1
R.C. de 2 y 4	R.C. de 3 y 5	

Ejercicio: pruebe por árboles de verdad que el siguiente argumento es válido.

1. $\neg (p \wedge \neg q)$
2. $r \supset s$
3. $\neg q \vee \neg s \quad / \therefore \neg r \vee \neg p$

4. $\neg(\neg r \vee \neg p)$ **hipótesis**
5. $\neg\neg r$ **L¬∨ de 4**
6. $\neg\neg p$ **L¬∨ de 4**

7. $\neg p$
R.C. de 6 y 7

8. $\neg\neg q$ **B¬ ∧ de 1**

9. $\neg r$
R.C de 5 y 9

10. s **B⊃ de 2**

11. $\neg q$
R.C. de 8 y 11

12. $\neg s$ **B∨ de 3**
R.C. de 10 y 12

Árboles de verdad para saber si una fórmula es contradictoria, tautológica o contingente.

- Si aplicamos árboles de verdad a una fórmula y se cierran todas las ramas, entonces es contradictoria.
- Si aplicamos árboles de verdad a la negación de una fórmula y se cierran todas las ramas, entonces es tautológica.
- Si aplicamos árboles de verdad y no es posible cerrar todas las bifurcaciones o listas ni de una fórmula ni de su negación, entonces es contingente.

Ejemplo: Pruebe la contradictoriedad de la siguiente fórmula:

1. $\neg \mathbf{p} \land (\neg \mathbf{q} \land \mathbf{p})$

2. $\neg p$	**L$\land$ de 1**
3. $\neg q \land p$	**L$\land$ de 1**
4. $\neg q$	**L$\land$ de 3**
5. $\underline{p}$	**L$\land$ de 3**
	RC 2y5

Aquí fue posible cerrar toda(s) la(s) trayectoria(s). Con esto mostramos que es contradictoria.

Ejemplo: Pruebe la tautologicidad de la siguiente fórmula:

$\neg (p \equiv \neg p)$

1. $(p \equiv \neg p)$ hipótesis

2. p
3. $\neg p$

RC 2y3

4. $\neg p$
5. p

RC 4y5

B≡ de 1

Ejemplo: Pruebe la contingencia de la siguiente fórmula:

1. $p \wedge (q \vee \neg p)$

- 2. p **L∧ de 1**
- 3. $q \vee \neg p$ **L∧ de 1**
- 4. q | 5. $\neg p$ **B∨ de 3**
- **RC 2y5**
- Si no es posible cerrar todas sus ramas, no es contradictoria.

2. $\neg [p \wedge (q \vee \neg p)]$ **hipótesis**

3. $\neg p$ | 4. $\neg (q \vee \neg p)$ **B¬∧ de 2**

5. $\neg q$ **L¬∨ de 4**

6. $\neg\neg p$ **L¬∨ de 4**

Si tampoco es posible cerrar todas las ramas de la negación de la fórmula original, no es tautológica.

Al probar la no-contradictoriedad y la no-tautologicidad de una misma fórmula, probamos su contingencia.

Aplicación del método árboles de verdad a un condicional asociado para probar su tautologicidad y, consiguientemente la validez del argumento.

1. $r \supset s$
2. $\neg q \wedge \neg s \quad / \therefore \neg r$

$[(r \supset s) \wedge (\neg q \wedge \neg s)] \supset \neg r$ condicional asociado

1. $\neg \{[(r \supset s) \wedge (\neg q \wedge \neg s)] \supset \neg r\}$ hipótesis

2. $(r \supset s) \wedge (\neg q \wedge \neg s)$ L$\neg\supset$ de 1
3. $\neg\neg r$ L$\neg\supset$ de 1
4. $r \supset s$ L $\wedge$ de 2
5. $\neg q \wedge \neg s$ L $\wedge$ de 2
6. $\neg q$ L $\wedge$ de 5
7. $\neg s$ L $\wedge$ de 5

8. $\neg r$ 9. s B $\supset$ de 4

R.C. de 8 y 3 R.C. de 9 y 7

Los árboles de verdad son equivalentes a las tablas de verdad.

- Si hacemos la tabla de verdad de un condicional asociado, podemos saber si un argumento es válido.

1. $p \supset q$
2. $p \quad / \therefore q$
3. $\neg q$ hipótesis

4. $\neg p$ 5. q B$\supset$ de 1

R.C. de 2 y 4   R.C. de 3 y 5

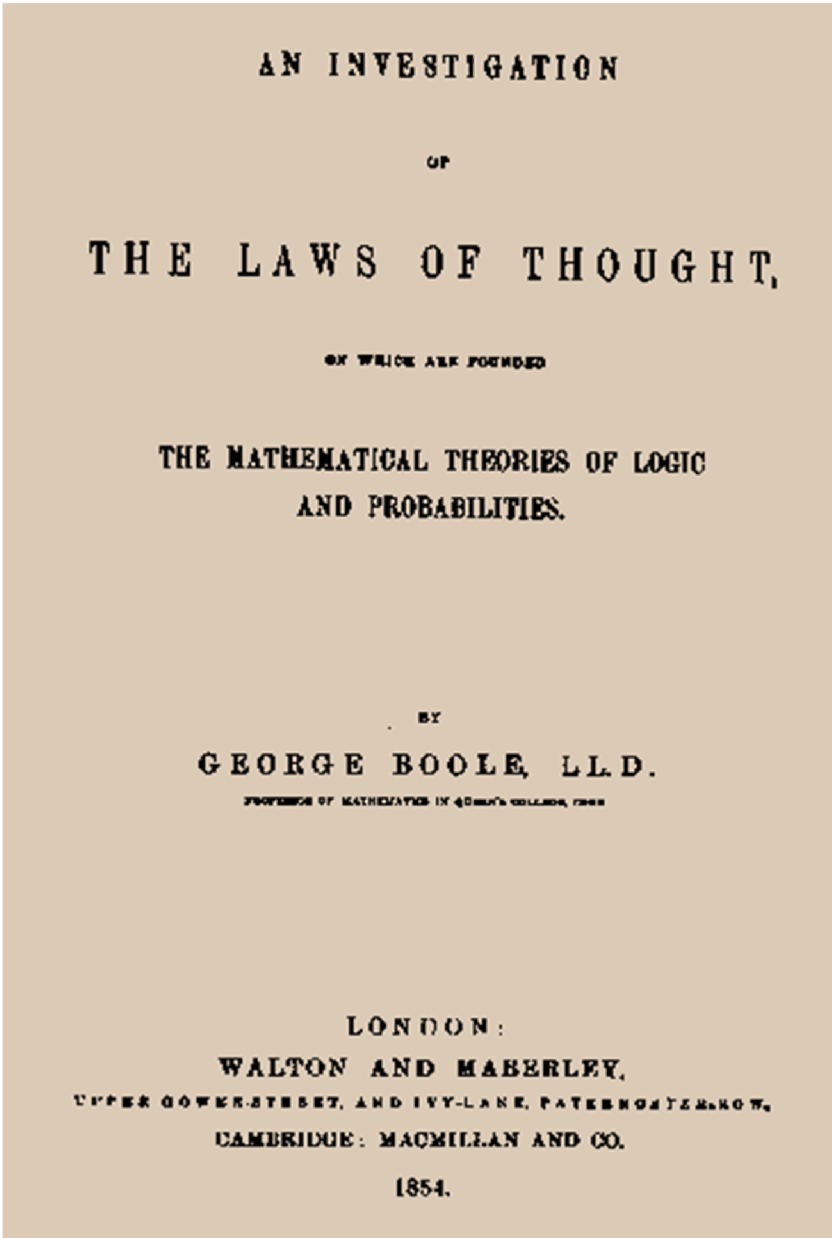
> Es posible mostrar la tautologicidad de una fórmula con alguna tabla de verdad si y sólo si es posible cerrar todas las ramas de su negación. Un argumento es válido por medio de árboles de verdad si y sólo si su condicional asociado es tautológico.

Nayeli Rodríguez
Enrique Montero
Rodolfo Vázquez
Raymundo Morado

Lógica algebraica

George Boole

George Boole (1815-1864)


AN INVESTIGATION

OF

THE LAWS OF THOUGHT,

THE MATHEMATICAL THEORIES OF LOGIC
AND PROBABILITIES.

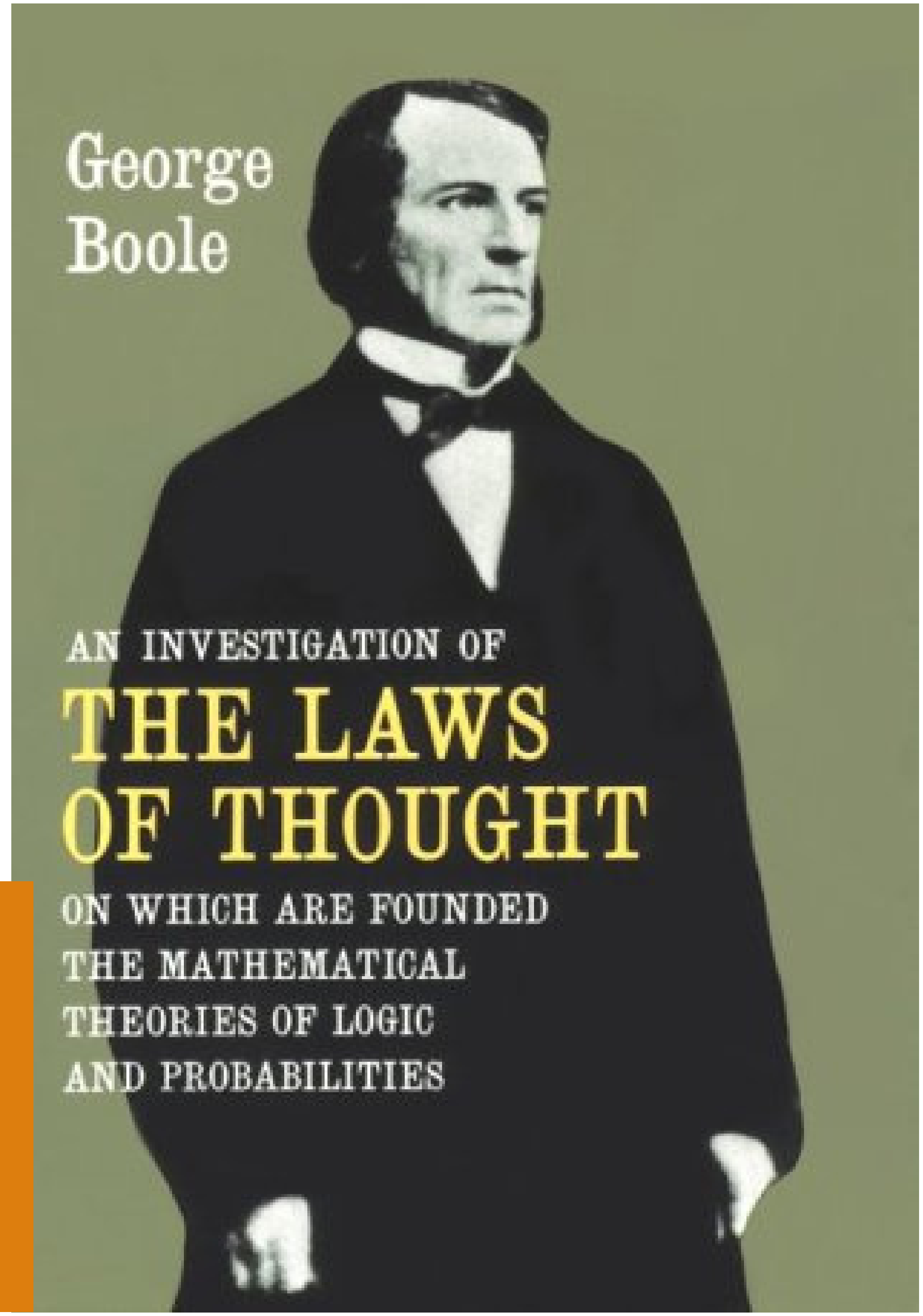
BY

GEORGE BOOLE, LL.D.

LONDON:
WALTON AND MABERLEY,
CAMBRIDGE: MACMILLAN AND CO.
1854.

- Inventor del álgebra booleana.
- En su libro desarrolla un sistema de reglas que le permitió manipular y simplificar por medio de procedimientos matemáticos problemas lógicos y filosóficos que admiten un sistema binario (V o F).
- Puede decirse que introdujo la interpretación matemática de la lógica clásica proposicional.

Así el álgebra de Boole nos permite manipular relaciones proposicionales y cantidades binarias.



Su libro fue publicado en 1854

USOS DEL ÁLGEBRA BOOLEANA

- El álgebra de Boole fue un intento de utilizar el álgebra para tratar expresiones de la lógica proposicional: LÓGICA ALGEBRAICA
- En la actualidad, el álgebra de Boole se aplica de forma generalizada en el ámbito del diseño electrónico.
- En las técnicas digitales se utiliza para la descripción y diseño de circuitos más económicos.
- Para demostración de teoremas (estrategias lógicas).

Usos de la lógica algebraica a nuestros fines

- Con la lógica algebraica podemos determinar si una fórmula del español es tautológica, contingente o contradictoria.

- Con la lógica algebraica podemos determinar si un argumento del español es válido proposicionalmente.

LÓGICA ALGEBRAICA

- EXPRESIONES BOOLEANAS
- Definición : Una expresión booleana es una sucesión de símbolos que incluye 0,1, algunas variables A, B, C, … *n*.
- Las operaciones booleanas $+$, $\bullet$, x^{-}.
- Para ser más precisos veamos las expresiones booleanas

Las tres principales conectivas lógicas tienen la misma función que las tres principales operaciones de lógica algebraica.

- Conjunción $\wedge$
- Disyunción $\vee$
- Negación $\neg$

Suma $+$

Producto $\cdot$

Complemento x^{-}

Complemento de x es todo lo que no es x, es decir, no x.

Asimilación de los operadores principales del Álgebra booleana.

Suma $+$

Producto $\cdot$

Complemento $\bar{x}$

A	B	A + B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	A · B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

- $\bar{A} \cdot B$

- $\bar{A} + B$

A	B	$\bar{A} \cdot B$
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

A	B	$\bar{A} + B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

No contradicción y Tercio excluso

$$\bar{A} \cdot A = 0$$

El producto de una variable por su complemento da 0, esto es…

A	$\bar{A} \cdot A$
1	0
0	0

$$\bar{A} + A = 1$$

La suma de una variable por su complemento da 1, esto e

A	$\bar{A} + A$
1	1
0	1

Simbolice conforme a la lógica algebraica la siguiente afirmación:

O demostramos teoremas o no estudiamos lógica algebraica. Estudiamos lógica algebraica.

$$(B + \bar{A}) \cdot A$$

¿Es contingente, tautológica o contradictoria?

Para saberlo necesitamos saber a qué es igual la fórmula:

$$(B + \bar{A}) \cdot A = A \cdot B$$

Pero… ¿por qué?

$$(A + A) \cdot B = A$$

¿Es correcta la igualdad?

No, porque ...

$$(A + A) \cdot B = A$$

$$A \cdot B = A \cdot B$$

En una conjunción el valor de verdad depende de ambos conyuntos

Postulados de las tres operaciones básicas

$\vee$ $\wedge$ $\neg$

- $0 + 0 = 0$ $1 \cdot 1 = 1$ $\overline{0} = 1$
- $1 + 0 = 1$ $1 \cdot 0 = 0$ $0 = \overline{1}$
- $0 + 1 = 1$ $0 \cdot 1 = 0$
- $1 + 1 = 1$ $0 \cdot 0 = 0$

Como sistema binario el máximo es 1

Justificaciones del uso de las reglas

- Regla de cero:

a) $X + 0 = X$

b) $X + 1 = 1$

c) $X \cdot 1 = X$

d) $X \cdot 0 = 0$

- Regla de complemento

$X + \overline{X} = 1$

$X \cdot \overline{X} = 0$

conmutación, asociación, de Morgan, distribución

Demostración de la estrategia Idempotencia multiplicativa

$(A \cdot A)$

$= (A \cdot A) + 0$	Regla de cero
$= (A \cdot A) + (A \cdot \overline{A})$	Complemento
$= A \cdot (A + \overline{A})$	Distribución
$= A \cdot 1$	Complemento
$= A$	Regla de cero

A

$= A \cdot 1$	Regla de cero
$= A \cdot (A + \overline{A})$	Complemento
$= (A \cdot A) + (A \cdot \overline{A})$	Distribución
$= (A \cdot A) + 0$	Complemento
$= (A \cdot A)$	Regla de cero

Demostración de la estrategia: Idempotencia aditiva

$(A + A)$

$= (A + A) \cdot 1$	Regla de cero
$= (A + A) \cdot (A + \overline{A})$	Complemento
$= A+(A \cdot \overline{A})$	Distribución
$= A \cdot 0$	Complemento
$= A$	Regla de cero

A

$= A + 0$	Regla de cero
$= A + (A \cdot \overline{A})$	Complemento
$= (A + A) \cdot (A + \overline{A})$	Distribución
$= (A + A) \cdot 1$	Complemento
$= (A + A)$	Regla de cero

Simbolice las proposiciones

Los métodos científicos o necesitan una justificación rigurosa del uso de otros métodos para apoyar sus hipótesis o los métodos científicos pueden usar métodos de probabilidad para apoyar sus hipótesis (o ambas cosas). Los métodos científicos no necesitan una justificación rigurosa del uso de otros métodos para apoyar sus hipótesis o los métodos científicos pueden usar métodos de probabilidad para apoyar sus hipótesis (o ambas cosas). Esto es igual a … (para saberlo simbolice y aplique el método de lógica algebraica).

$$(A + B) \cdot (\overline{A} + B) =$$

Aplicación del método de lógica algebraica

$(A + B) \cdot (\overline{A} + B) =$

$= (B + A) \cdot (B + \overline{A})$ Conmutación (2 veces)

$= B + (A \cdot \overline{A})$ Distribución

$= B + 0$ Complemento (regla de la complementación)

$= B$ Regla cero

$$(A + B) \cdot (\overline{A} + B) = B$$

Una vez aplicado el método se puede saber que la frase original se reduce a: los métodos científicos pueden usar métodos de probabilidad para apoyar sus hipótesis

|Simbolice las proposiciones

O Stuart Mill tenía razón sobre el cálculo de la probabilidad o no hay más interpretaciones rigurosas sobre el cálculo de la probabilidad como la de Mill. Ahora bien, hay más interpretaciones igual de rigurosas que la de Mill sobre el cálculo de la probabilidad o sólo el cálculo de la probabilidad de Mill satisface los axiomas. Pero, hay más interpretaciones sobre el cálculo de la probabilidad igual de rigurosas que la de Mill o no sólo el cálculo de la probabilidad de Mill satisface los axiomas.

$$(A+\overline{B})\cdot(B+C)\cdot(B+\overline{C})=$$

Demuestre por el método algebraico a qué es igual la fórmula.

$(A+\overline{B})\cdot(B+C)\cdot(B+\overline{C})$

$= (A+\overline{B})\cdot[B+(C\cdot\overline{C})]$ Distribución

$= (A+\overline{B})\cdot[B+0]$ Complemento

$= (A+\overline{B})\cdot B$ Regla cero

$= (A\cdot B)+(\overline{B}\cdot B)$ Distribución

$= (A\cdot B)+0$ Complemento

$= (A\cdot B)$ Regla cero

$$(A+\overline{B})\cdot(B+C)\cdot(B+\overline{C}) = (A\cdot B)$$

Reducción

$\overline{[(p\cdot \bar{q}\cdot r)+(p\cdot q\cdot r)]}$	
$=\overline{[(\bar{q}\cdot p\cdot r)+(q\cdot p\cdot r)]}$	conmutación
$=\overline{(p\cdot r)\cdot(\bar{q}+q)}$	distribución
$=\overline{(p\cdot r)}\cdot 1$	complemento
$=\overline{(p\cdot r)}$	regla de cero
$=(\bar{p}+\bar{r})$	de Morgan

ALGEBRA Y RESOLUCIÓN DE QUINE (*Methods*, cap. 5)

- $A^{-} \cdot A = 0$
- $A^{-} + A = 1$
- $A + 0 = A$
- $A + 1 = 1$
- $A \cdot 1 = A$
- $A \cdot 0 = 0$
- $A + A = A$
- $A \cdot A = A$
- $B \cdot (B + B) = B$
- $A \cdot (A + B) = A$

Resolución tipo Robinson

- Básicamente, Reducción al Absurdo mediante Unificación y Silogismo Disyuntivo.

- ¿Es consistente $\{\neg p \lor \neg q \lor r, \neg r, p, \neg t \lor q, t\}$?

¿Es consistente $\{\neg p \vee \neg q \vee r, \neg r, p, \neg t \vee q, t\}$?

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
& \neg p \vee \neg q \vee r \arrow[dr] & & \neg r \arrow[dl] & \\
& & \neg p \vee \neg q \arrow[dr] & & p \arrow[dl] \\
& \neg t \vee q \arrow[dr] & & \neg q \arrow[dl] & \\
& & \neg t \arrow[dr] & & t \arrow[dl] \\
& & & \square &
\end{tikzcd}
$$

Proximidades

- Post-test Diagnóstico hoy.
- A más tardar el sábado en la mañana estarán disponibles en línea:
  - Tareas 14 y 15 a entregar el miércoles (no el martes) a las 23:30.
  - Guía para examen final a entregar también a más tardar el próximo miércoles 30 a las 23:30.
- Tendremos una clase de reposición el miércoles de 12 a 14 horas. Traiga sus preguntas específicas y por escrito.
- El Examen Final será el próximo jueves 1 de diciembre a las 12:00. Cubrirá lo visto desde el parcial anterior.
- Después del examen habrá una visita guiada al IIFs. Nos vemos el jueves 1 a las 15:00, a la entrada del Instituto. Si traen auto, digan que vienen a verme. Deben registrarse a la entrada. Visitaremos también la biblioteca García Máynez.