Curso de Problemas de Lógica: *Lógica Modal*

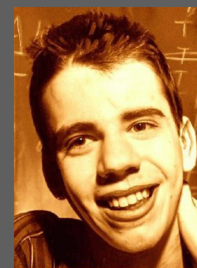
Séptima sesión

Otoño de 2017

Raymundo Morado

Esta sesión

- La teoría de la lógica modal cambió con el artículo de un joven de 19 años: "A Completeness Theorem in Modal Logic", *The Journal of Symbolic Logic*, Marzo de 1959, pp. 1-14. (Tenemos el artículo en nuestra página.)



El joven era Saul Aaron Kripke (1940-).

¿Cómo se evalúa una fórmula?

Si escribimos algo A, por ejemplo [Llueve & (w daña a z -> w es injusto)], abreviado [L & (Dwz -> Iw)], la verdad de A dependerá de la relación de A con la realidad. Para una fórmula normal, depende (1) de qué estamos hablando (el llamado dominio de discurso "D"), (2) de a qué o quién nos referimos con los nombres "x", "w", "z", etc. que aparezcan en A, (3) qué valores de verdad tienen las oraciones atómicas en A como "Llueve", y (4) la extensión de predicados y relaciones en A como "x es injusto" o "w daña a z". Todo lo demás en A (conectivas, cuantificadores, paréntesis, etc.) está determinado por su significado lógico.

Dicho técnicamente:

P. 2: Given [1] a non-empty domain D and a formula A, we define a complete assignment for A in D as a function which [2] to every free individual variable of A assigns an element of D, [3] to every propositional variable of A assigns either T or F, and [4] to every n-adic predicate variable of A assigns a set of ordered n-tuples of members of D.

¿Y si hay muchas descripciones posibles?

- Bueno, cada uno de esos "complete assignments" define un mundo posible. Si juntamos todas las posibles interpretaciones de A (que hablan del mismo universo de discurso D y de los mismos objetos nombrados por "x", "w", "z", etc.) basta que digamos cuál de las posibles interpretaciones de la realidad es la verdadera (llamémosla "G"). Es decir, cuál da la verdadera extensión de los predicados y el verdadero valor de verdad de las oraciones atómicas. Las demás interpretaciones son posibilidades pero no verdaderas.

¿Cuándo es verdad una fórmula modal?

- La verdad de una afirmación modal ("Es imposible que A", "Necesariamente A", etc.), depende de la verdad de A en ésta y otras situaciones.
- Para evaluar oraciones con operadores modales como []A -> A, necesitamos ver en qué situaciones A es verdadera (para evaluar el antecedente), y cuál es la situación actual (para evaluar el consecuente).

En palabras de Kripke:

P. 2: The basis of the informal analysis which motivated these definitions is that a proposition is necessary if and only if it is true in all "possible worlds."

P. 3: [In modal logic] we wish to know not only about the real world but about other conceivable worlds [..] Thus we are led not to a single assignment but to a set K of assignments, all but one of which represent worlds which are conceivable but not actual; the assignment representing the actual world is singled out as G, and the pair (G, K) is said to form a model of A.

Dicho técnicamente:

Cuando una oración A habla de objetos, está delimitando, a veces implícitamente, su dominio de discurso ("Nadie me quiere"; "Todo es posible en la juventud", etc.). Llamemos a ese dominio de discurso "D".

Para entender una fórmula que abrevia con letras los nombres de individuos y predicados necesitamos saber qué significa cada letra. Las letras para individuos serán nombres de individuos de D. Las letras para predicados y relaciones serán nombres de la extensión de esos predicados y relaciones.

Eso nos da muchas interpretaciones diferentes de las constantes. Escojamos una a la que llamaremos "G" y veamos el conjunto "K" de todas las interpretaciones que coinciden con G en lo que asignan a las variables libres. El par <G,K> es un "modelo" de la oración A en el universo de discurso D.

Dicho técnicamente:

P. 2: We define a model of A in D as an ordered pair (G, K), where G is a complete assignment for A in D and K is a set of complete assignments for A in D such that $G \in K$ and such that every member of K agrees with G in its assignments for free individual variables of A (but not necessarily in its assignments for propositional and predicate variables of A).

- []B is assigned T if every member of K assigns T to B (subject to the stipulation that all members of K agree in their assignments to all free individual variables of B); otherwise, it is assigned F.

Furthermore, since x1, ... , xn represent individual objects, which remain the same in all worlds, we assume that all members of K agree in their assignments to individual variables.

[...] a proposition []B is evaluated as true when and only when B holds in all conceivable worlds. A proposition can be said to be true if it holds in the actual world; this idea leads to our definition of validity in a model.

[...] it is plausible to assume that no further restrictions need be placed on D, G, and K, except the standard one that D be non-empty. This assumption leads directly to our definition of universal validity.

Validez en un modelo, en un dominio, universalmente.

A es válida en un modelo si es verdadera según la asignación que el modelo señala como la actual ("G"). Analogía: Holmes muere en "The Final Problem".

A es válida en un dominio de discurso "D" si es válida en todo modelo con ese dominio. Analogía: Holmes habla con Watson en las doce historias de "The Memoirs of Sherlock Holmes".

A es válida universalmente si es válida en todo dominio en el que exista algo. Analogía: Algo es Holmes (o no) en cualquier libro de Arthur Conan Doyle.

Dicho técnicamente:

P. 2:

A is said to be valid in a model (G, K) of A in D if and only if A is assigned T by G.

A is said to be valid in D if and only if A is valid in every model of A in D.

A is said to be satisfiable in D if and only if there is some model of A in D in which A is valid.

A is said to be universally valid if and only if A is valid in every non-empty domain.

Completud y corrección

P. 10:

THEOREM 5. If A is universally valid, then |-A in S5*=. [...] Theorem 5 is our completeness theorem for the system S5*=

P. 11: We shall now prove a consistency [correctness] theorem for S5,*=, the converse of our Theorem 5.

THEOREM 6. If |-A in S5*=, A is universally valid.

- The completeness theorem given in the present paper is based on the system S5. It is well known that many alternative modal systems exist; five distinct systems are proposed in [C. I. Lewis and C. H. Langford, *Symbolic Logic*] alone. Further, if modal logic is extended to admit quantification and identity, there are other controversial laws such as (x)[]A(x) -> [](x)A(x) and (a, b) (a=b -> []a=b). Some of these systems, alternative to S5*=, lead to alternative notions of completeness; and any comparison of them for "acceptability" can be based on an examination of these alternative semantical notions. The details of such considerations will appear in a sequel to the present paper.

Alumnos en lista

ACOSTA VALENCIA **DENISSE**
ALVARADO HERNANDEZ **BRUNO** ATZIN
CHAVEZ RAMOS **MASAO** AGUSTIN
FLORES RAMIREZ **CRISTINA** ISABEL
GOMEZ CHECA **ANGEL**
GONZALEZ CUEVAS ANDREA (**ANDY**)
GONZALEZ HOLGUIN RIGEL ?
GUTIERREZ ZUÑIGA MARTIN ?
LARA GOMEZ **JESUS** AXEL
LUNA HERRERA RICARDO ?
MATA JUAREZ **CHRISTIAN**
MONROY PEREZ **OSCAR** ANTONIO
RICO CORTES **MARI**ANA
RUIZ MENDOZA JESUS **FELIPE**

Tarea para el jueves 16 de noviembre de 2017

1. Envíe una presentación en PowerPoint que cubra los dos siguientes textos:

A. “Semantical Analysis of Modal Logic I”, 1963

(nada más las pp. 67-70 y la sección 6 “Other systems”).

B. “Semantical Considerations on Modal Logic”, 1963.

2. Esté lista(o) para hacer la presentación en clase.