Curso de Problemas de Lógica: *Lógica Modal*

Octava sesión

Otoño de 2017

Raymundo Morado

En línea

- Las diapositivas de Óscar Monroy.

Preguntas de Denisse

- ¿Se puede reducir cualquier axioma a un juicio analítico? (Respuesta: No; recordemos el postulado 1.8.)
- ¿Es un sistema "mejor" si tiene los menos axiomas posibles? (Respuesta: Es más elegante si conserva el mismo poder inferencial. Si no, la simplicidad no es un criterio decisivo. Compárese el sistema original con 8 postulados del *Survey* con B1-B9 de *Symbolic Logic*.)

Indagaciones de Christian en lógica proposicional y lógica modal

- "(p -3 q) es equivalente a □ (p c q)"
- "toda aquella formula bien formada cuya conectiva principal sea una implicación material; y además, su tabla de verdad sea una tautología, es una implicación estricta. Aunado a esto, podemos decir que no es posible que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso; es decir: ~◊(p ~q). Lo cual es la definición de la implicación estricta."

Epistémico =/= Ontológico

- Pregunta: ¿Por lo tanto podemos inferir que ◊ refiere a una tabla de verdad contingente?
- Respuesta: No, porque algo puede ser necesario (o imposible) por razones no veritativo-funcionales. En otras palabras, lo *posible-hasta-donde-la-tabla-de-verdad-puede-ver*, podría no ser posible. Los términos "*Posibilidad*" y "*Posibilidad-hasta-donde-X-puede-ver*" no son sinónimos.

- ¿Podemos decir de (A C B) que ◊(A C B) o ◊~(A C B)?
- No, ya que lo *posible-hasta-donde-la-tabla-de-verdad-puede-ver* podría no ser posible. Ejemplos:

¿Cuál es la tabla de verdad de "(x)Fx & ¬Fa"?

¿Cuál es la tabla de verdad de "La pelota es completamente roja y completamente azul"?

¿Cuál es la tabla de verdad de "0=1"?

¿Cuál es la tabla de verdad de "Juan es un soltero casado"?

Las tablas de verdad son incapaces de notar esas contradicciones. Hasta donde alcanzan a ver, son estados de cosas posibles.

¿Cuál es la tabla de verdad de "A&B"?

- Como no sabemos si A y B son compatibles, necesarias o imposibles, hacemos toda la combinatoria: VV, VF, FV, FF.
- Pero, si A y B son incompatibles, VV no ocurre nunca.
- Si A es necesaria, FV y FF no ocurren nunca.
- Si A es imposible, VV y VF no ocurren nunca.
- Si B es necesaria, VF y FF no ocurren nunca.
- Si B es imposible, VV y FV no ocurren nunca.
- Si A implica a B, VF no ocurre nunca.
- Es decir, hay renglones "fantasma".

Moraleja

- Si la tabla de verdad (o cualquier otro método) alcanza para probar la tautologicidad de una proposición, la proposición es necesaria.
- Si la tabla de verdad (o cualquier otro método) alcanza para probar la contradicción de una proposición, la proposición es imposible.
- Pero, si la tabla de verdad (o cualquier otro método) no alcanza para probar la tautologicidad o contradicción de una proposición, **no sabemos** si la proposición es necesaria, imposible o contingente. Solamente que es veritativo-funcionalmente contingente.

Ejercicios de comprensión

- Si logran probar algo, era verdad.
- Si logran refutar algo (probar su falsedad), era falso.
- ¿Y, si no logran ni probar ni refutar?

- Si logran probar la inocencia, era inocente.
- Si logran probar la culpabilidad, era culpable.
- ¿Y, si no logran ni probar inocencia ni probar culpabilidad?

Presentaciones

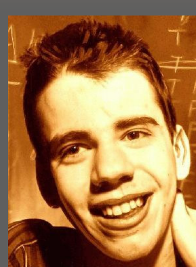
A. "Semantical Analysis of Modal Logic I", 1963-I
(nada más las pp. 67-70 y la sección 6 "Other systems").

B. "Semantical Considerations on Modal Logic", 1963.

Solamente Denisse, Masao y Christian.
Al finalizar sus presentaciones, estarán exentos con 10.

Recordando la sesión previa

- "A Completeness Theorem in Modal Logic", *The Journal of Symbolic Logic*, Marzo de 1959, pp. 1-14.



Saul Aaron Kripke (1940-).

Validez, Completud y Corrección

Valid in a model (G, K) in D iff assigned T by G.

Valid in D iff valid in every model in D.

Universally valid iff valid in every non-empty domain.

If A is universally valid, then |-A in S5*=

If |-A in S5*=, A is universally valid

Anunciando 1963-I

- Some [...] systems, alternative to S5*=, lead to alternative notions of completeness; and any comparison of them for "acceptability" can be based on an examination of these alternative semantical notions.
- The details of such considerations will appear in a sequel to the present paper.

Masao (1963-I)

Elementos:

- Variables proposicionales (P, Q, R, ...) [formulas atómicas]
- Conectivas proposicionales (∧, ¬, □) [las demás conectivas se definen a partir de las anteriores]

  *Las conectivas relacionan a las variables proposicionales para construir sentencias (formulas bien formadas)
- Metavariables (A, B, C, ...) [remplazan cualquier sentencia]
- Axiomas:

  A1. $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$

  (M) $\Box A \supset A$ [axioma distintivo de los sistemas *normales*]
- Reglas de inferencia:

  R1. Si $\vdash A$ y $\vdash A \supset B$, entonces $\vdash B$

  R2. Si $\vdash A$, entonces $\vdash \Box A$

Masao (1963-I)

A *modal propositional calculus* (MPC) is given by a denumerably infinite list of *propositional variables* $P, Q, R, \ldots$, which can be combined, using the *connectives* $\wedge$, $\sim$, $\Box$, to form *formulae* (wffs) as in [1]. (The propositional variables are thus the *atomic formulae* of the systems. Below we will use the letters $P, Q, R, \ldots$, as *metavariables* ranging over atomic formulae; $A, B, C, \ldots$, as metavariables over arbitrary formulae.) A modal propositional calculus is called *normal* iff it contains as theorems the axiom schemes A1 and A3 of [1], and contains as admissible (derivable) rules the two rules of inference R1 and R2 of [1]:

A1. $\Box A \supset A$

A3. $\Box(A \supset B) .\supset. \Box A \supset \Box B$

R1. If $\vdash A$ and $\vdash A \supset B$, $\vdash$ then B.

R2. If $\vdash A$, then $\vdash \Box A$.

Masao (1963-I)

Sistemas normales

Cumplen las dos reglas de inferencia R1 y R2, y variando los axiomas que poseen se configuran los distintos sistemas.

A1. $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$
(M) $\Box A \supset A$ → Sistema M

Sistema M
(B) $A \supset \Box \Diamond A$ → Sistema B

Sistema M
(4) $\Box A \supset \Box\Box A$ → Sistema S4

Sistema M
(5) $\Diamond A \supset \Box \Diamond A$ → Sistema S5

Masao (1963-I)

Una estructura modelo normal (NMS) es una tripleta ordenada $\langle G, K, R \rangle$, donde:

- K es un conjunto no vacío
- $G \in K$ [G es un objeto distinguido]
- R es *reflexiva*

La estructura anterior podemos llamarla M-estructura modelo.

Además sucede que:

(A) Cuando R además de ser *reflexiva* también es *transitiva* es una S4-estructura modelo

(B) Cuando R además de ser *reflexiva* también es *simétrica* es una B-estructura modelo

(C) Cuando R una relación de *equivalencia* es una S5-estructura modelo

Masao (1963-I)

Algunas consideraciones que realizar:

(1) La semántica se basa en la idea de «mundo posible» así:

- K es un conjunto de mundos posibles
- G es el mundo actual
- Toda formula atómica tiene un valor de verdad en cada $H \in K$.

(2) Las relaciones R entre dos mundos $H_1, H_2 \in K$ se expresan mediante la formulación $H_1 R H_2$. Dicha formulación se entiende como: «H_2 es un mundo posible relativo para el mundo H_1»

(3) Para todo mundo posible $H \in K$ sucede que:

- HRH; por lo que, para toda fórmula $A \in \mathrm{H}$, si $\phi(A, H) = V$, entonces $\phi(\Diamond A, H) = V$

Lo anterior nos expresa que si una fórmula A es verdadera en un mundo, entonces es esa fórmula A es posible desde ese mundo.

Masao (1963-I)

Un M-modelo para una formula A es un una función $\phi(P,H)$, que asocia a la formula A con una M-estructura modelo específica.
Para los demás sistemas el procedimiento es análogo.

- En la función $\phi(P,H)$:
  - La variable P se determina con subfórmulas de A
  - La variable H se determina con algún miembro de K

El rango de función $\phi(P,H)$, es el conjunto D $= \{V, F\}$; esto es

$$\phi(P,H) = V$$
o
$$\phi(P,H) = F$$

Masao (1963-I)

La asociación que realiza la función $\phi(P,H)$ a las subfórmulas de A, para cualquier $H \in K$ se realiza de la siguiente manera:

- Si B es una subfórmula atómica (proposición) de A, el valor está definido en H, i.e. o bien $\phi(B,H) = V$ o $\phi(B,H) = F$
- Si los valores de B y C están definidos en H entonces:
  - (A) $\phi(B \wedge C, H) = V$ si $\phi(B,H) = V$ y $\phi(C,H) = V$
  - (B) $\phi(B \wedge C, H) = F$ si $\phi(B,H) = F$ o $\phi(C,H) = F$
- Si el valor de B está bien definido en H entonces:
  - (A) $\phi(B,H) = V$ si $\phi(\neg B,H) = F$
  - (B) $\phi(B,H) = F$ si $\phi(\neg B,H) = V$
- Si el valor de B está bien definido en H, entonces:
  - (A) $\phi(\Box B,H) = V$ si para todo $H' \in K$ y HRH', se cumple que $\phi(B,H') = V$
  - (B) $\phi(\Box B,H) = F$ si hay por lo menos un $H' \in K$ y HRH', tal que se cumple que $\phi(B,H') = F$

Masao (1963-I)

If B is atomic, (i.e., is a propositional variable), the corresponding value $\Phi(B, \mathsf{H})$ has already been defined. For more complex formulae we define the valuation by induction on the number of connectives in the formula. Assume that $\Phi(B, \mathsf{H})$ and $\Phi(C, \mathsf{H})$ have already been defined for each $\mathsf{H} \in \mathsf{K}$. If $\Phi(B, \mathsf{H}) = \Phi(C, \mathsf{H}) = \mathsf{T}$, then $\Phi(B \wedge C, \mathsf{H}) = \mathsf{T}$; otherwise $\Phi(B \wedge C, \mathsf{H}) = \mathsf{F}$. If $\Phi(B, \mathsf{H}) = \mathsf{T}$, then $\Phi(\sim B, \mathsf{H}) = \mathsf{F}$; otherwise if $\Phi(B, \mathsf{H}) = \mathsf{F}$, $\Phi(\sim B, \mathsf{H}) = \mathsf{T}$. Finally, to define $\Phi(\Box B, \mathsf{H})$: If $\Phi(B, \mathsf{H}') = \mathsf{T}$ for every H' in K such that $\mathsf{H}\, \boldsymbol{R}\, \mathsf{H}'$, we say $\Phi(\Box B, \mathsf{H}) = \mathsf{T}$; otherwise, if there exists H' such that $\mathsf{H}\, \boldsymbol{R}\, \mathsf{H}'$ and $\Phi(B, \mathsf{H}') = \mathsf{F}$, we say $\Phi(\Box B, \mathsf{H}) = \mathsf{F}$.

Masao (1963-I)

1) Una fórmula A es *verdad* en un modelo ϕ asociado a una NMS (G,K,R) si $\phi(P,G) = V$; *falsa*, si $\phi(P,G) = F$.
2) Una formula A es *válida* si es verdadera en todo modelo.
3) Una formula A es *satisfacible* si es verdadera en por lo menos un modelo.
4) Una formula A es *válido* sii es probable, una vez probados los teoremas de completitud y consistencia [corrección].

Masao (1963-I)

- Variando las relaciones de acceso o, lo que es equivalente, variando axiomas a los sistemas M, B, S4, S5, pueden obtenerse otros sistemas modales.

Ej. Si a S4 se añade el axioma$(\Diamond A \wedge \Diamond B) \supset (\Diamond (A \wedge \Diamond B) \vee \Diamond (B \wedge \Diamond A))$

*Lo anterior equivale a modificar el tipo de relaciones que se establece entre dos mundos de una S4-estructura modelo.

Si $H_1, H_2 \in K$, entonces o bien $H_1 R H_2$ o $H_2 R H_1$.

- Además si se elimina el axioma (M) $\Box A \supset A$, o la relación reflexiva, se obtienen los sistemas modales para la lógica deóntica.

*Por muy deseable que sea que si algo es obligatorio se cumpla, no siempre sucede.

Masao (1963-I)

[redacted] An example of a system between S4 and S5 is the System S4.3 of [21], obtainable by adding the scheme $\Diamond A \wedge \Diamond B .\supset. \Diamond(A \wedge \Diamond B) \vee \Diamond(B \wedge \Diamond A)$ to S4. Model-theoretically, this amounts to a requirement on a S4-model-structure $(\mathsf{G}, \mathsf{K}, \boldsymbol{R})$ that if $\mathsf{H}, \mathsf{H}' \in \mathsf{K}$, then either $\mathsf{H}\, \boldsymbol{R}\, \mathsf{H}'$ or $\mathsf{H}'\, \boldsymbol{R}\, \mathsf{H}$. Other systems formed by imposing various requirements on $\boldsymbol{R}$ [redacted]

If we were to drop the condition that $\boldsymbol{R}$ be reflexive, this would be equivalent to abandoning the modal axiom $\Box A \supset A$. In this way we could obtain systems of the type required for deontic logic.

Christian (1963-I)

SISTEMA NORMAL O CÁLCULO PROPOSICIONAL

Características

- Incluye:
1. M
2. S4
3. S5

4. Es dado por una lista indeterminada de variables proposicionales que pueden ser combinadas usando las conectivas: ^, ~, □.

5. Un cálculo proposicional modal es llamado normal únicamente cuando contiene como teoremas el esquema de axiomas A1 y A3, y contiene como reglas admisibles (derivables) las dos reglas de inferencia R1 Y R2.

Christian (1963-I)

Axiomas:

A1. □A C A

A2. ~ □ A C □ ~ □ A

A3. □(A C B) c (□A C □B)

A4. ├ □ A C □ □A

B. A C □ ◊ A

Reglas de inferencia:

R1. Si ├ A y ├ A C B, ├ entonces B

R2. Si ├ A, entonces ├ □A

Christian (1963-I)

CONSTRUCCIÓN DE SISTEMAS CON BASE M

- Sistema M(T) de Feys Von Wright es dado por: A1, A3, R1 Y R2.
- El sistema S4 es obtenido por añadir A4 a M.
- El sistema BROUWERsche por añadir el axioma BROUWERsch a M.
- S5 es obtenido por añadir A2 a M

Christian (1963-I)

MODELOS NORMALES

La estructura de un modelo normal:

- Triple ordenación (G, K, R) donde k no es vacío y G es elemento de K.
- R es una relación reflexiva definida en K.
  - Si R es transitiva la llamaremos estructura del modelo S4.
  - Si R es simétrica, la llamaremos estructura del modelo BROUWERSsche.
  - Si R es una relación de equivalencia, será llamada estructura de modelo S5.
  - Una estructura de modelo normal también es llamada una estructura de modelo M.

Christian (1963-I)

MODELOS PARA FÓRMULAS DE M (S4, S5, B)

- Un modelo es una función binaria □ (P, H) asociada con una estructura de modelo M (S4, S5 B) (G, H, R)
- Un modelo M (S4, S5, B) para una fbf A de M (S4, S5, B); La primera variable 'P' rige sobre las subfórmulas atómicas de A, mientras que la segunda variable 'H' recorre los miembros de K; en otras palabras □ (P, H) asigna para cosa proposición p un valor de verdad en el mundo H.
- El rango de □ (P, H) es el conjunto {T, F}

Christian (1963-I)

VALUACIÓN

- Dado un modelo □ asociado a una estructura de modelo (G, K, R) nosotros definimos para cualquier subfórmula B de A y para cualquier elemento de K, un valor el cual será verdadero o falso.
- Por lo que nosotros definimos una única extensión de □ en la cual el primer argumento rige todas las subfórmulas de A.
- Cuando B es atómica el valor ha sido definido pero en fórmulas más complejas nosotros definimos el valor por inducción sobre el número de conectivas en la fórmula.

Christian (1963-I)

VALUACIÓN POR INDUCCIÓN

Asumiendo que ▯ (B, H) y ▯ (C, H) han sido definidos para cada elemento de K:

- [Si ▯ (B, H) = ▯ (C, H) = T]⟶ [▯ (B^C, H) = T]; de otro modo ▯ (B ^ C, H) = F.
- [Si ▯ (B, H) = T] ⟶ [▯ (~B, H) =F]; De otra manera, si [▯ (B, H) = F] ⟶ [▯ (~B, H) = T].
- Para definir ▯ (□B, H): ▯ (B, H') = T para cualquier H' en K tal que H R H', decimos ▯ (□B, H) = T; de otra manera, si existe un H' tal que H R H' y ▯ (B, H') = F, entonces diremos que ▯ (□B, H) = F.

Christian (1963-I)

AFIRMACIONES SOBRE FÓRMULAS

A es verdadera cuando:

En un modelo ▯ asociado con un modelo de estructura (G,K,R)

▯(A, G) = T

A es falso cuando:

▯(A, G) = F

A es válido si es verdadero en todos los modelos

A es satisfacible si es verdadero en al menos uno de los modelos

Christian (1963-I)

NOCIÓN DE RELACIÓN

Dados cualesquiera dos mundos (H1, H2) Є k, leemos "H1 R H2" como: H2 es "posible relativo a H; "posible en H1"; o " relacionado con H1". Esto quiere decir que cualquier proposición verdadera en H2 es posible en H1.

De acuerdo con esta noción obtenemos nuevas forma de evaluación de fórmulas.

Christian (1963-I)

EVALUACIÓN DE FÓRMULAS EN UN MUNDO H

- A es necesaria en un mundo H1, si es verdadera en todo mundo posible relativo a H1.
- ▯(□A, H1)=T sii ▯(A, H2)=T

Para cada H2 tal que

H1 R H2

- A es posible en H1 sii existe un H2, relativo a H1, en el cual A es verdad.
- ▯(◊A, H1)=T sii (∃HN): ·(A, HN)=T

Christian (1963-I)

TEOREMA DE COMPLETUD

├A en M (S4, S5, B) únicamente cuando:

·(A, G) = T para cualquier modelo · sobre un modelo de estructura M (S4,S5,B) (G, K, R)

Otras lógicas intensionales

- Lógicas Deónticas de García Máynez, von Wright, Bulygin
- Lógicas temporales de Prior, Cocchiarella
- Lógicas epistémicas de Hintikka.
- Lógicas contrafácticas de David Lewis
- Lógicas relevantistas de Anderson, Belnap, Dunn

Examen final: entrega hasta el 13 de enero de 2018

1. Explique qué problema planteó la demostración de Post a Lewis, incluyendo los antecedentes y las consecuencias.
2. Explique cómo generalizó Kripke su trabajo de 1959 con sus trabajos de 1963-I y 1963.
3. Explique con al menos 10 ejemplos para qué sirve a una filósofa aprender lógica modal.
4. Explique las motivaciones de las diferencias entre las Lógicas Deónticas de Bulygin.
5. Explique las motivaciones de las Lógicas relevantistas de Anderson/Belnap/Dunn y en qué se distinguen de las de C. I. Lewis.