# Curso de Problemas de Lógica: *Lógica Modal*

## Undécima sesión

Otoño de 2017

Raymundo Morado

## Bulygin: Normas y proposiciones normativas.

- El cálculo clásico de lógica deóntica es un sistema ideal de normas.
- La lógica de las normas reales no es normativa sino descriptiva.
- Hay dos relaciones:
- $A \vdash B$ De A se deriva B.
- $A \models B$ De A se sigue B.

## Lógica de Proposiciones Normativas (no de Normas)

- $\Gamma \models \mathbf{O}p$ =df $\mathbf{O}_\Gamma\ p$
- $\Gamma \models \mathbf{P}p$ =df $\mathbf{P}^+_\Gamma\ p$

  (Permisión fuerte o positiva)
- $\Gamma \not\models \mathbf{O}\neg p$ =df $\mathbf{P}^-_\Gamma\ p$

  (Permisión débil o negativa)

## ¿Qué teoremas sobreviven? ¿Cuáles no?

| | |
|---|---|
| $\neg(\mathbf{O}_\Gamma\ p \wedge \mathbf{O}_\Gamma\ \neg p)$ | No es válido |
| $\mathbf{O}_\Gamma\ (p \wedge q) \equiv (\mathbf{O}_\Gamma\ p \wedge \mathbf{O}_\Gamma\ q)$ | Es válido |
| $\mathbf{P}^+_\Gamma\ p \equiv \neg\, \mathbf{O}_\Gamma \neg\, p$ | No es válido |
| $\mathbf{P}^-_\Gamma\ p \equiv \neg\, \mathbf{O}_\Gamma \neg\, p$ | Es válido |
| $\mathbf{O}_\Gamma\ p \supset \mathbf{P}^+_\Gamma\, p$ | Es válido |
| $\mathbf{O}_\Gamma\ p \supset \mathbf{P}^-_\Gamma\, p$ | No es válido |

| | |
|---|---|
| $\mathbf{P}^+_\Gamma\ p \vee \mathbf{P}^+_\Gamma\ \neg p$ | No es válido |
| $\mathbf{P}^-_\Gamma\ p \vee \mathbf{P}^-_\Gamma\ \neg p$ | No es válido |
| $\mathbf{P}^-_\Gamma\ (p \vee q) \equiv (\mathbf{P}^-_\Gamma\ p \vee \mathbf{P}^-_\Gamma\ p)$ | Es válido |
| $\mathbf{P}^+_\Gamma\ (p \vee q) \equiv (\mathbf{P}^+_\Gamma\ p \vee \mathbf{P}^+_\Gamma\ p)$ | No es válido |

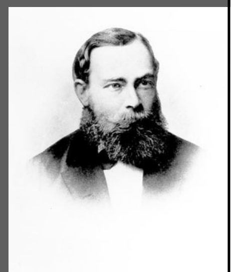
## Lógicas de la relevancia

- Alan Ross Anderson (1925 – 1973)

Nuel D. Belnap, Jr. (1930-)

## $A \supset B$

- Filón de Megara, siglo IV a. C.
- Boole, *The Laws of Thought* (1958) *“Si quis [Fabius] natus est oriente Canícula, is in Mari non morietur”*. **YX = 0**
- Frege, *Begriffsschrift* (1879)



---

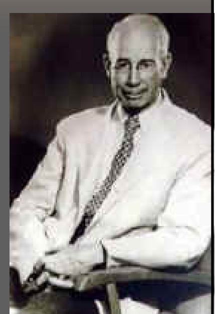
- Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1890-1905)
- Couturat, *L’algèbre de la logique* (1914)
- Quine, *Methods of Logic* (1972)

- Ballard, *Study Guide for Copi: Introduction to Logic* (1972): “Simbolícese… No es el caso que si la luna está hecha de queso verde entonces los vehículos espaciales no serán capaces de posarse en ella”. “~ (**M** ⊃ ~ **S**). (Nótese que de este enunciado aparentemente verdadero, uno puede deducir que la luna está hecha de queso verde.)”

---

## Lewis y Langford, *Symbolic Logic* (1932)

“Tómese un número igual de afirmaciones verdaderas y falsas escogidas al azar y, sin importar de qué se traten, escríbanse en pedazos de papel y pónganse en un sombrero. Sáquense dos al azar. La probabilidad de que el que se saque primero implicará materialmente al segundo es 3/4. La probabilidad de que el segundo implicará materialmente al primero es 3/4. La probabilidad de que cada uno implicará materialmente al otro es 1/2. Y la probabilidad de que ninguno implicará materialmente al otro es 0.”



---

## Russell y Whitehead, *Principia Mathematica* (1910-1913)

El condicional material es una condición mínima de una deducción pero no es una condición suficiente.

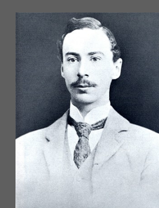
$(A \models B)$ ==>? $(A \supset B)$

$\neg(A \supset B)$==>? $\neg(A \models B)$

$\neg(A \models B)$ ==>? $\neg(A \supset B)$

$A \models (B \models C)$ ==>? $A \supset (B \supset C)$

$(A \models B) \models C$ ==>? $(A \supset B) \supset C$



---

## Russell y Whitehead, *Principia Mathematica* (1910-1913)

El condicional material es una condición mínima de una deducción pero no es una condición suficiente.

$(A \models B)$ ==> $(A \supset B)$

$\neg(A \supset B)$==>? $\neg(A \models B)$

$\neg(A \models B)$ ==>? $\neg(A \supset B)$

$A \models (B \models C)$ ==>? $A \supset (B \supset C)$

$(A \models B) \models C$ ==>? $(A \supset B) \supset C$

---

## Russell y Whitehead, *Principia Mathematica* (1910-1913)

El condicional material es una condición mínima de una deducción pero no es una condición suficiente.

$(A \models B)$ ==> $(A \supset B)$

$\neg(A \supset B)$ ==> $\neg(A \models B)$

$\neg(A \models B)$ ==>? $\neg(A \supset B)$

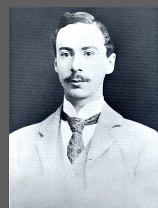
$A \models (B \models C)$ ==>? $A \supset (B \supset C)$

$(A \models B) \models C$ ==>? $(A \supset B) \supset C$

## Russell y Whitehead, *Principia Mathematica* (1910-1913)

El condicional material es una condición mínima de una deducción pero no es una condición suficiente.

$(A \models B) \Longrightarrow (A \supset B)$
$\neg(A \supset B) \Longrightarrow \neg(A \models B)$
$\neg(A \models B) \not\Longrightarrow \neg(A \supset B)$

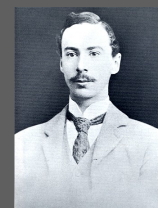


$A \models (B \models C) \Longrightarrow ?\ A \supset (B \supset C)$
$(A \models B) \models C \Longrightarrow ?\ (A \supset B) \supset C$

## Russell y Whitehead, *Principia Mathematica* (1910-1913)

El condicional material es una condición mínima de una deducción pero no es una condición suficiente.

$(A \models B) \Longrightarrow (A \supset B)$
$\neg(A \supset B) \Longrightarrow \neg(A \models B)$
$\neg(A \models B) \not\Longrightarrow \neg(A \supset B)$

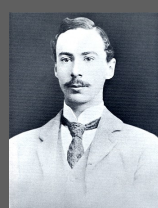


$A \models (B \models C) \Longrightarrow A \supset (B \supset C)$
$(A \models B) \models C \Longrightarrow ?\ (A \supset B) \supset C$

## Russell y Whitehead, *Principia Mathematica* (1910-1913)

El condicional material es una condición mínima de una deducción pero no es una condición suficiente.

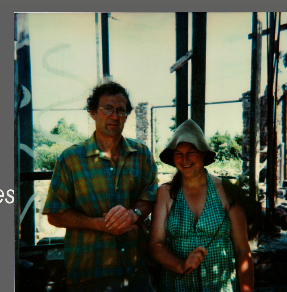
$(A \models B) \Longrightarrow (A \supset B)$
$\neg(A \supset B) \Longrightarrow \neg(A \models B)$
$\neg(A \models B) \not\Longrightarrow \neg(A \supset B)$



$A \models (B \models C) \Longrightarrow A \supset (B \supset C)$
$(A \models B) \models C \not\Longrightarrow (A \supset B) \supset C$

## Weak Relevance

- *commonality of meaning in propositional logic is carried by commonality of propositional variables*



## Wilhelm Ackermann (1956)

- "La implicación fuerte (*strenge*) que representamos por $A \longrightarrow B$, debe expresar que entre A y B existe una conexión lógica, que el contenido de B es una parte del contenido de A (*der Inhalt von* B *ein Teil des Inhaltes von* A *ist*), o como lo queramos decir. Esto no tiene nada que ver con la veracidad o la falsedad de A y B."

## "Paradojas"

- (1) $A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$
- (2) $A \longrightarrow (B \longrightarrow (A \,\&\, B))$
- (3) $A \longrightarrow (\neg A \longrightarrow B)$
- (4) $A \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow B)$
- (5) $B \longrightarrow (A \longrightarrow A)$
- (6) $(A \,\&\, \neg A) \longrightarrow B$.

## Π'

- Si X es una fórmula puramente veritativo funcional entonces no es demostrable ninguna fórmula de la forma X ⟶ (Y ⟶ Z).
- ¿ ⊢ Π' (A & ¬A) ⟶ B?
- Las reglas de inferencia son:
- (α) Modus Ponens (sólo para la implicación; no está definido el condicional material)
- (β) Conjunción
- (γ) Silogismo disyuntivo
- (δ) La deducción de A ⟶ C a partir de A ⟶ (B ⟶ C) si *B* es una identidad lógica.

- (1)A ⟶ A
- (2)(A ⟶ B) ⟶ ((B ⟶ C) ⟶ (A ⟶ C))
- (3)(A ⟶ B) ⟶ ((C ⟶ A) ⟶ (C ⟶ B))
- (4)(A ⟶ (A ⟶ B)) ⟶ (A ⟶ B)
- (5)A & B ⟶ A (6)A & B ⟶ B
- (7)(A ⟶ B) & (A ⟶ C) ⟶ (A ⟶ (B & C))
- (8)A ⟶ A v B (9)B ⟶ A v B
- (10)(A ⟶ C) & (B ⟶ C) ⟶ (A v B ⟶ C)
- (11)A & (B v C) ⟶ B v (A & C)
- (12)(A ⟶ B) ⟶ (¬ B ⟶ ¬ A)
- (13)A & ¬ B ⟶ ¬ (A ⟶ B)
- (14)A ⟶ ¬ ¬A (15) ¬ ¬A ⟶ A

- Pero Π' "contiene todo el cálculo de enunciados bivalente en el sentido de que se pueden deducir todas las formulas universalmente válidas que se forman con las tres conectivas &, v, ¬".
- Se ha rechazado A ⟶ (B ⟶ A)
- No se ha rechazado A ⊃ (B ⊃ A)

## ¿Extensión o rival?

- A&B (1959): "***E*** *contiene el cálculo bivalente completo*".
- A&B (1975): "El cálculo bivalente clásico es exactamente el fragmento extensional de cada uno de **E**, **R** y **T**".
- Routley (1984): Π' "*hace a la lógica relevante una simple extensión de la lógica clásica*".
- Wolf (1978): **R "***es técnicamente una extensión de la lógica clásica*". Pero, es "*filosóficamente un rival*".

- Lewis (1912): Las paradojas de la implicación material no son "ni oráculos misteriosos, ni grandes descubrimientos, ni gruesos absurdos".
- Al introducir un nuevo operador (-3) y aceptar acotadas las verdades de LC, Lewis obtuvo una extensión.
- A&B también introducen un nuevo operador (⟶) pero niegan que ciertas inferencias de LC sean válidas. En este sentido la lógica relevante no es una extensión sino un rival.
- La rivalidad no consiste en carecer de ciertos teoremas o en no tener ciertas reglas de inferencia, sino en el ámbito en que se considera ilegítimo aplicarlas.

Dunn (1986): leer "A⊃B" como *A implica B*, "*es casi universalmente rechazado por los escritores de textos de lógica elemental como una lectura siquiera aceptable*".

- A&B: 1. Para que de Φ se deduzca Ψ, Φ debe ser relevante para Ψ.
- 2. A&¬A puede ser totalmente irrelevante para B. (Similarmente, B para A→A.)
- 3. De 1 y 2: no es cierto que siempre (A & ¬A) → B. (Similarmente, para B→(A→A).)
- Un lógico clásico debiera aceptar 1 pero rechazar 2. Pero no es posible rechazar 2 en el sentido de negar que (A & ¬A) pueda ser irrelevante cuando la relevancia se define en función de comunidad de variables.

## Todos tienen razón, pero no sobre lo mismo

- Los clásicos tienen razón si afirman que entre (A&¬A) y cualquier B hay relevancia de contenido semántico, en algún sentido sensato.
- Los relevantistas tienen razón si afirman que entre (A&¬A) y algunas B no hay relevancia de comunidad de variables, que también es un sentido claro y sensato de relevancia.

## Otras presentaciones

- Óscar: Lógicas temporales de Prior
- Cristina: Lógicas contrafácticas de David Lewis, *Counterfactuals*, de 1973, secciones 1.1, 1.2 y 4.2

## Examen final: entrega hasta el 13 de enero de 2018

1. Explique qué problema planteó la demostración de Post a Lewis, incluyendo los antecedentes y las consecuencias.
2. Explique cómo generalizó Kripke su trabajo de 1959 con sus trabajos de 1963-I y 1963.
3. Explique con al menos 10 ejemplos para qué sirve a una filósofa aprender lógica modal.
4. Explique las motivaciones de las diferencias entre las Lógicas Deónticas, usando las nociones de Bulygin.
5. Explique las motivaciones de las Lógicas relevantistas de Anderson/Belnap/Dunn y en qué se distinguen de las de C. I. Lewis.