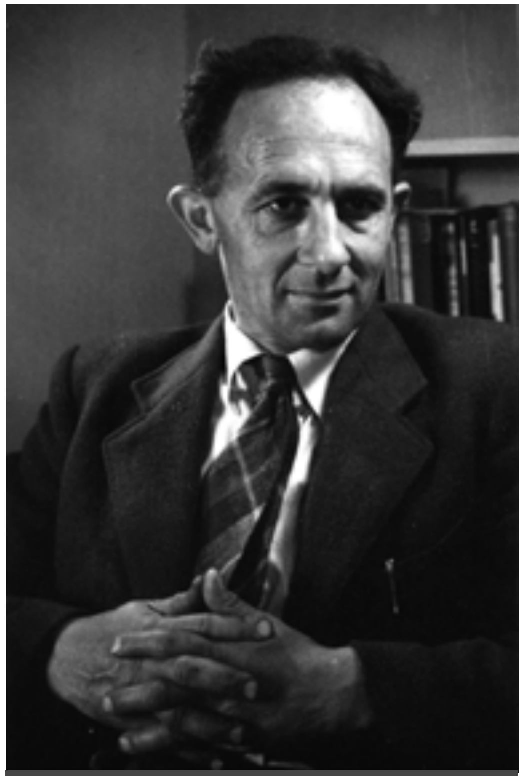
LÓGICA TEMPORAL

Lo que siempre ha sido y
lo que siempre será

TENSE LOGIC AND THE LOGIC OF EARLIER AND LATER



Arthur N. **PRIOR**

"I want to present here […] a series of calculi involving the notion of **being true** (or as Rescher says, 'realized') **at an instant**, making more and more controversial assumptions at each main stage."

M

Necesitación: Si $\vdash \alpha$, entonces $\vdash \Box\alpha$.

A1. $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$

A2. $\Box p \supset p$

¿□?

$\boxed{f}\,p$: siempre en el futuro es el caso que p.

$\boxed{p}\,p$: siempre en el pasado es el caso que p.

$$\neg\boxed{\mathrm{f}}\neg\boldsymbol{\alpha} := \Diamond\mathrm{f}\,\boldsymbol{\alpha}$$

$$\neg\boxed{\mathrm{p}}\neg\boldsymbol{\alpha} := \Diamond\mathrm{p}\,\boldsymbol{\alpha}$$

$\Diamond\mathrm{f}\,p$: a veces en el futuro es el caso que p.

$\Diamond\mathrm{p}\,p$: a veces en el pasado es el caso que p.

K_t

E. John **LEMMON**

Necesitación futura: Si $\vdash \alpha$, entonces $\vdash \boxed{\text{f}}\,\alpha$.

Af1. $\boxed{\text{f}}(p \supset q) \supset (\boxed{\text{f}}\,p \supset \boxed{\text{f}}\,q)$

Af2. $\Diamond_{\text{p}}\boxed{\text{f}}\,p \supset p$

Necesitación pasada: Si $\vdash \alpha$, entonces $\vdash \boxed{\text{p}}\,\alpha$.

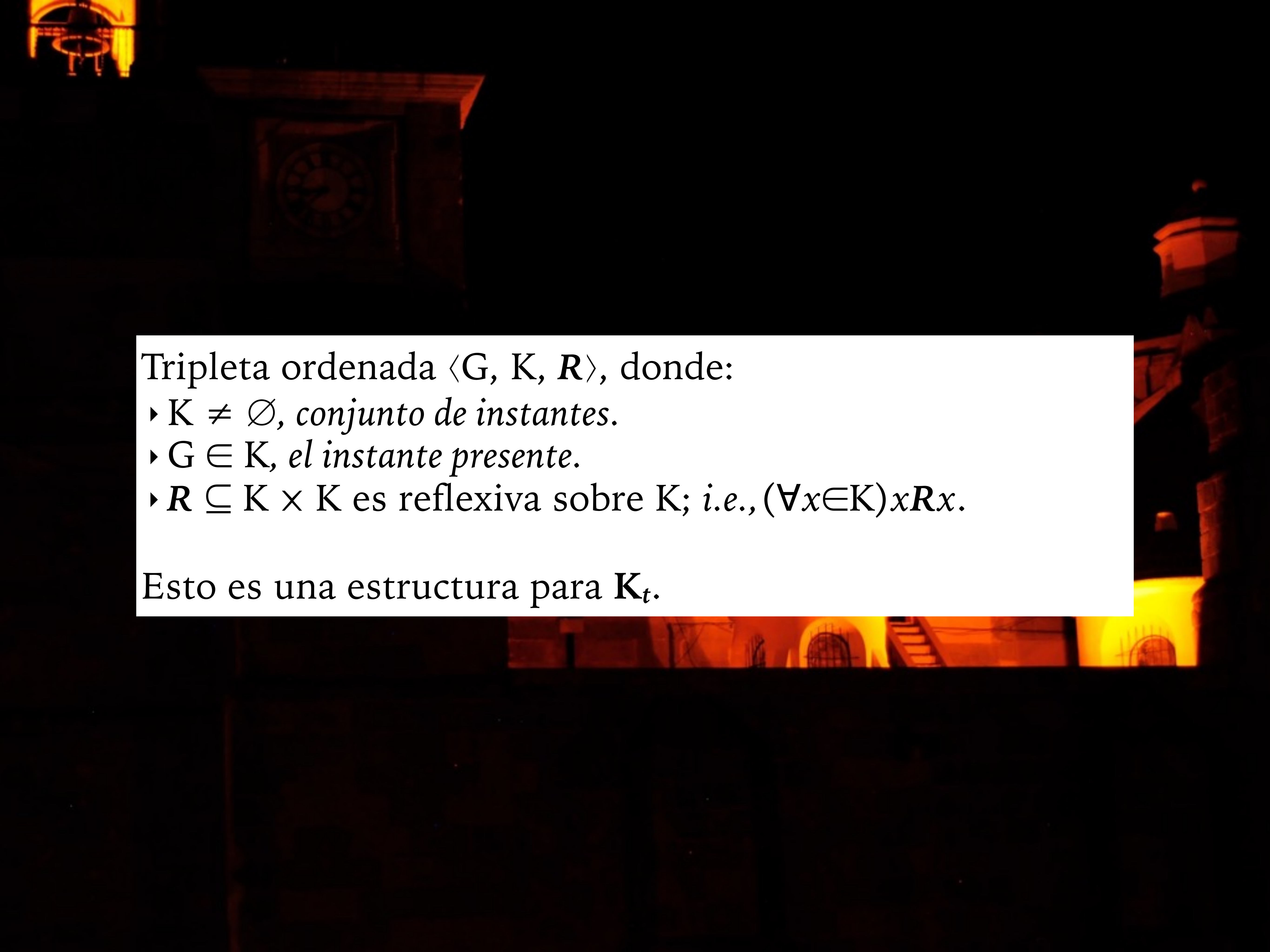
Ap1. $\boxed{\text{p}}(p \supset q) \supset (\boxed{\text{p}}\,p \supset \boxed{\text{p}}\,q)$

Ap2. $\Diamond_{\text{f}}\boxed{\text{p}}\,p \supset p$

Tripleta ordenada $\langle G, K, \boldsymbol{R}\rangle$, donde:

- $K \neq \varnothing$, *conjunto de mundos posibles*.
- $G \in K$, *el mundo actual*.
- $\boldsymbol{R} \subseteq K \times K$ es reflexiva sobre K; *i.e.*, $(\forall x{\in}K)x\boldsymbol{R}x$.

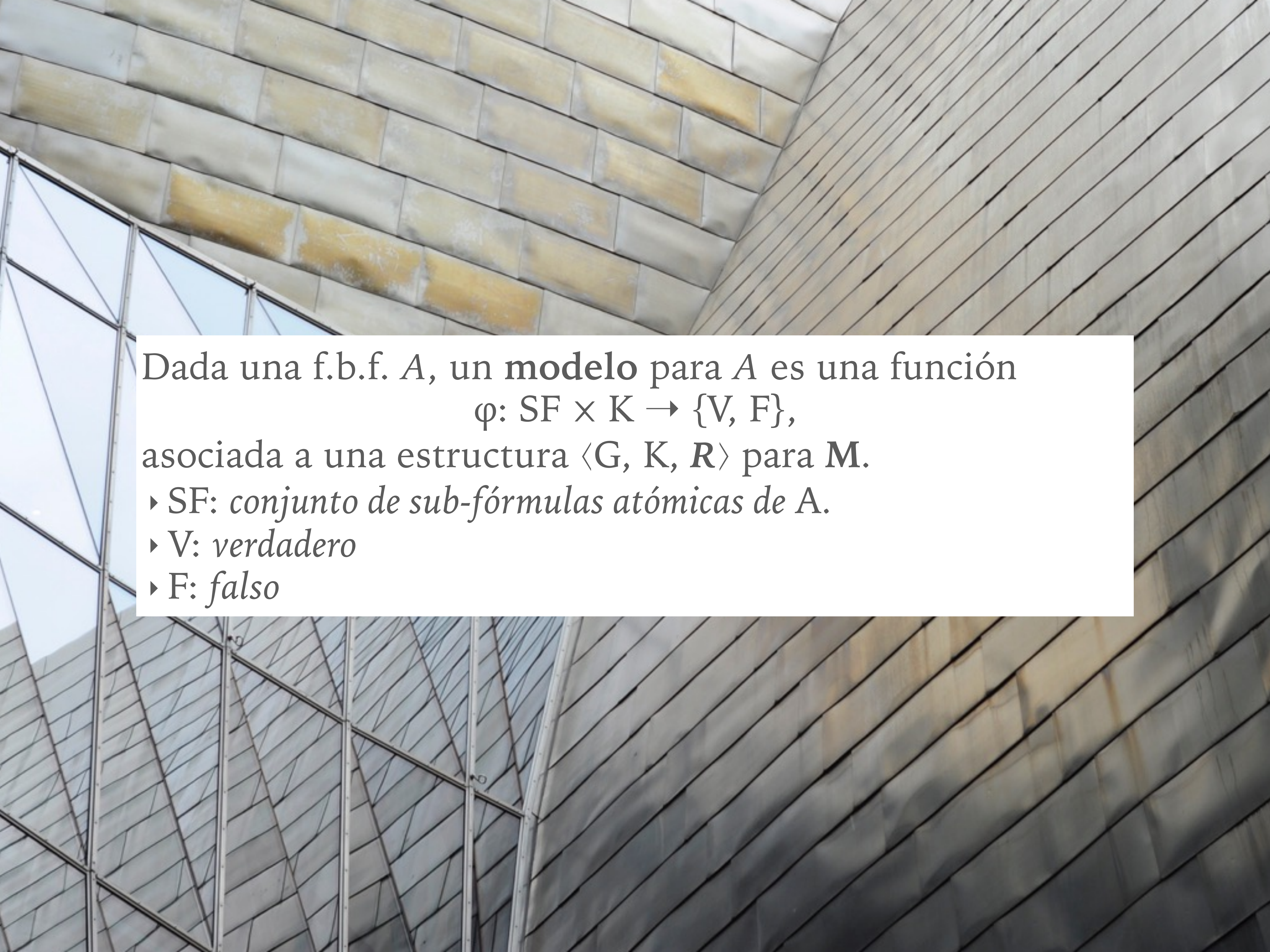
Esto es una estructura para **M**.



Tripleta ordenada $\langle G, K, \boldsymbol{R} \rangle$, donde:

- $K \neq \emptyset$, *conjunto de instantes.*
- $G \in K$, *el instante presente.*
- $\boldsymbol{R} \subseteq K \times K$ es reflexiva sobre K; *i.e.*, $(\forall x \in K) x \boldsymbol{R} x$.

Esto es una estructura para $\mathbf{K}_t$.

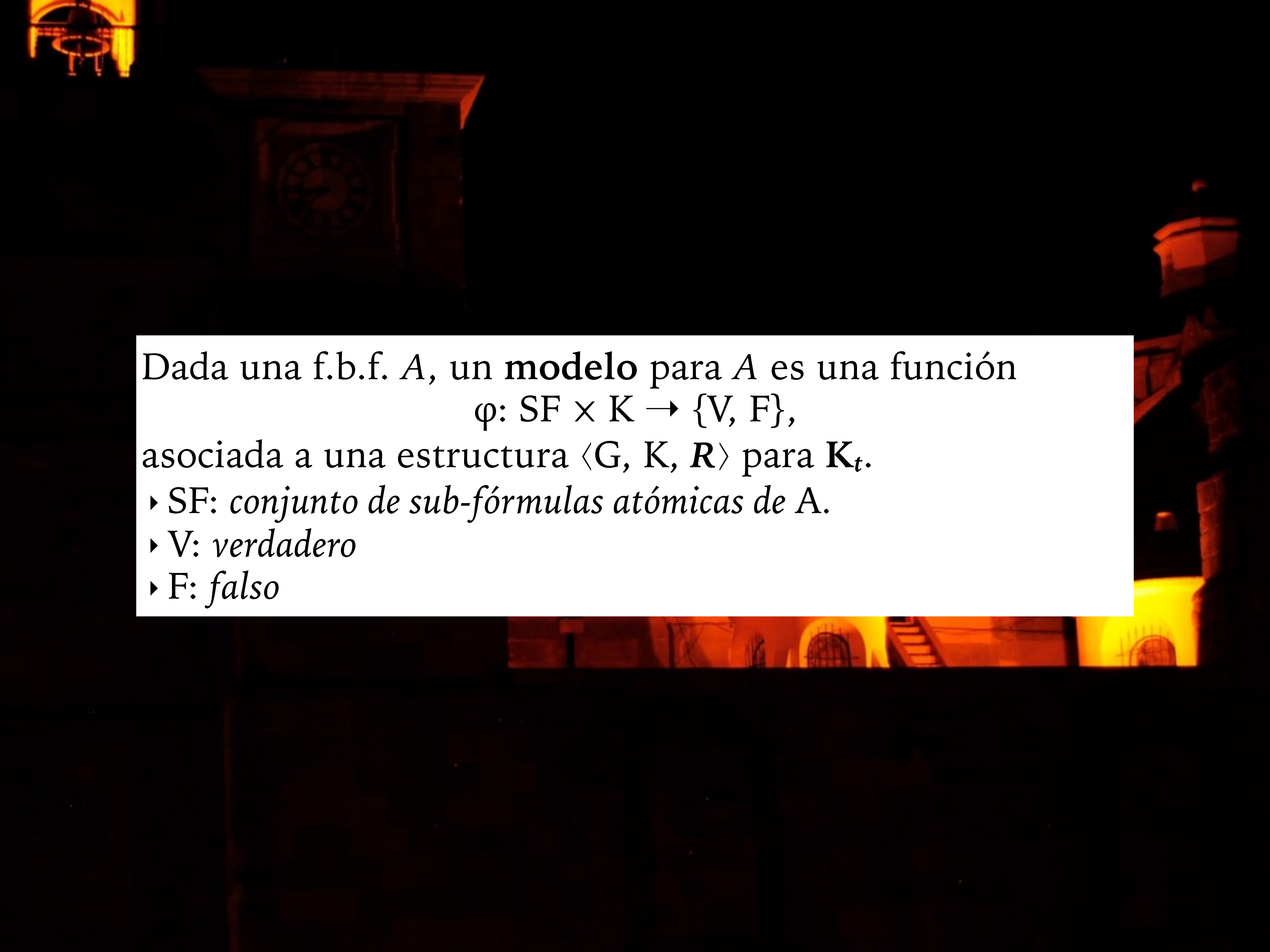


Dada una f.b.f. *A*, un **modelo** para *A* es una función

$$\varphi\colon \mathrm{SF} \times \mathrm{K} \to \{\mathrm{V}, \mathrm{F}\},$$

asociada a una estructura ⟨G, K, ***R***⟩ para **M**.

- SF: *conjunto de sub-fórmulas atómicas de* A.
- V: *verdadero*
- F: *falso*



Dada una f.b.f. A, un **modelo** para A es una función

$$\varphi\colon \mathrm{SF} \times \mathrm{K} \rightarrow \{\mathrm{V}, \mathrm{F}\},$$

asociada a una estructura $\langle \mathrm{G}, \mathrm{K}, \boldsymbol{R} \rangle$ para $\mathbf{K}_t$.

- SF: *conjunto de sub-fórmulas atómicas de* A.
- V: *verdadero*
- F: *falso*


R

$\boldsymbol{R}$

'$a\boldsymbol{R}b$' expresa que a es anterior a b, o que b es posterior a a.

Constreñimientos sobre $\boldsymbol{R}$:

Reflexividad: $\forall x \in \mathrm{K}(x\boldsymbol{R}x)$

Simetría: $\forall x,y \in \mathrm{K}(x\boldsymbol{R}y \supset y\boldsymbol{R}x)$

Transitividad: $\forall x,y,z \in \mathrm{K}((x\boldsymbol{R}y \wedge y\boldsymbol{R}z) \supset x\boldsymbol{R}z)$

Axiomas

Reflexividad: $\boxed{\mathrm{f}}\,p \supset p$; $\boxed{\mathrm{p}}\,p \supset p$

Simetría: $p \supset \boxed{\mathrm{f}}\Diamond_{\mathrm{f}}\,p$; $p \supset \boxed{\mathrm{p}}\Diamond_{\mathrm{p}}\,p$

Transitividad: $\boxed{\mathrm{f}}\,p \supset \boxed{\mathrm{f}}\boxed{\mathrm{f}}\,p$; $\boxed{\mathrm{p}}\,p \supset \boxed{\mathrm{p}}\boxed{\mathrm{p}}\,p$

$\boldsymbol{R}$

Constreñimientos sobre $\boldsymbol{R}$:

Convergencia: $\forall x,y,z((x\boldsymbol{R}y \wedge x\boldsymbol{R}z) \supset \exists t(y\boldsymbol{R}t \wedge z\boldsymbol{R}t))$

No-ramificación hacia el futuro:

$\forall x,y,z((x\boldsymbol{R}y \wedge x\boldsymbol{R}z) \supset (y = z \vee (y\boldsymbol{R}z \vee z\boldsymbol{R}y)))$

No-ramificación hacia el pasado:

$\forall x,y,z((y\boldsymbol{R}x \wedge z\boldsymbol{R}x) \supset (y = z \vee (y\boldsymbol{R}z \vee z\boldsymbol{R}y)))$

Axiomas

Convergencia: $\Diamond_f \Box_f p \supset \Box_f \Diamond_f p$; $\Diamond_p \Box_p p \supset \Box_p \Diamond_p p$

No-ramificación hacia el futuro:

$(\Diamond_f p \wedge \Diamond_f q) \supset (\Diamond_f(p \wedge q) \vee (\Diamond_f(p \wedge \Diamond_f q) \vee \Diamond_f(\Diamond_f p \wedge q)))$

No-ramificación hacia el pasado:

$(\Diamond_p p \wedge \Diamond_p q) \supset (\Diamond_p(p \wedge q) \vee (\Diamond_p(p \wedge \Diamond_p q) \vee \Diamond_p(\Diamond_p p \wedge q)))$

$\boldsymbol{R}$

Constreñimientos sobre $\boldsymbol{R}$:

Hay futuro: $\forall x \exists y (x\boldsymbol{R}y)$

Hay pasado: $\forall x \exists y (y\boldsymbol{R}x)$

Densidad: $\forall x,y (x\boldsymbol{R}y \supset \exists z (x\boldsymbol{R}z \wedge z\boldsymbol{R}y))$

Axiomas

Constreñimientos sobre ***R***:

Hay futuro: $\Box_f p \supset \Diamond_f p$

Hay pasado: $\Box_p p \supset \Diamond_p p$

Densidad: $\Box_f \Box_f p \supset \Box_f p$