DOI: https://doi.org/10.22370/rhvXXXXXXXXXXXXXXXX
Artículos- Sección Miscelánea

Reduccionismo en Mecánica Cuántica: el Límite Clásico en Formalismos Alternativos

Reductionism in Quantum Mechanics: the Classical Limit in Alternative Formalisms

Javier Berjón de Gortari*; Elias Okon Gurvich**
*Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Investigaciones Filosóficas, México
javier.berjon1@gmail.com
**Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Investigaciones Filosóficas, México
okonelias@gmail.com

Resumen

El problema del límite clásico se refiere a cómo recuperar la dinámica clásica o newtoniana, partiendo de los principios de la mecánica cuántica. En otras palabras, el problema es cómo reducir a la física clásica a la teoría cuántica. Es común encontrar en los textos populares de mecánica cuántica que este problema está resuelto, sin embargo aquí presentamos una crítica a estas supuestas soluciones del problema y mostramos por qué no son realmente satisfactorias. Lo que nosotros proponemos es abordar el problema desde las teorías alternativas al formalismo cuántico estándar; en particular desde la teoría de onda-piloto y también GRW (con densidad de masa). Ambas teorías están mejor equipadas para lidiar con el problema del límite clásico porque cuentan con una clara y precisa ontología, que hace más fácil conectar sus elementos teóricos con el mundo de la experiencia. Sin embargo también faltan algunos obstáculos por superar para dichas teorías y aquí proponemos cómo debería de verse una solución general para esto.

Palabras clave: mecánica cuántica, filosofía de la ciencia, filosofía de la física, límite clásico, fundamentos de mecánica cuántica.

Abstract

The classical limit problem refers to how the classical or Newtonian dynamics can be recovered from the principles of quantum mechanics. In other words the problem is how to reduce classical physics to quantum theory. It is commonplace to find in popular quantum mechanics texts that the problem is solved, nevertheless here we present a critique of these supposed solutions to the problem and we show why they are not really satisfactory. What we propose is to approach the problem from the alternative theories to the standard quantum formalism; in particular from the pilot-wave theory and also GRW (with mass density). Both theories are better equipped to deal with the classical limit problem because they have a clear and precise ontology, which makes it easier to link their theoretical elements to the world of

experience. This notwithstanding, there still remain some obstacles to overcome for said theories and here we propose how a general solution to this should look like.
Keywords: quantum mechanics, philosophy of science, philosophy of physics, classical limit, foundations of quantum mechanics.

Received: xxxxxx
Final version: xxxxxxx

1. Introducción

La mecánica cuántica es en principio una teoría del mundo microscópico. Fue formulada para dar cuenta de los fenómenos que involucran electrones, protones y demás elementos de la materia, de los cuales están conformados los objetos que podemos considerar macroscópicos, como mesas, sillas, etc. Ahora bien, ya que el mundo macroscópico, en última instancia, está hecho de elementos microscópicos, los cuales se explican desde la mecánica cuántica, entonces es natural preguntarse si es posible que la teoría cuántica pueda dar cuenta también de los fenómenos macroscópicos. En otras palabras, existe el problema de cómo recuperar la dinámica clásica del mundo macroscópico, partiendo de los principios de la teoría cuántica. Esto ha sido parte del programa de la mecánica cuántica desde sus inicios (Liboff 1984; Jammer 1966), por lo que es común encontrar en los libros de texto sobre teoría cuántica este llamado problema del límite clásico. (Históricamente el primero en enunciar algo así como el problema del límite clásico, parece haber sido Max Planck, aunque típicamente se le suele adjudicar (equivocadamente) a Niels Bohr, el demandar que la teoría cuántica recupere a la física clásica en algún límite apropiado (Rosenfeld 1979; Bokulich 2008)).

Más aún, en las fuentes habituales de la teoría, se suele afirmar que el problema se encuentra resuelto, es decir que supuestamente se puede recuperar a la teoría clásica desde la mecánica cuántica, o bien, que podemos reducir la primera a la segunda (Sakurai 1994; Griffiths 2005; Ballentine 1998). En este trabajo queremos argumentar, sin embargo, que las comunes soluciones para el problema del límite clásico no son del todo satisfactorias. Además de esto, queremos poner en evidencia por qué el marco conceptual estándar de la teoría cuántica no es conducente para resolver dicho problema, y que si se mira desde el lente de las llamadas "interpretaciones alternativas" de la mecánica cuántica, entonces puede ser mucho más sencillo encontrar una solución al problema.

La primera parte del artículo tiene que ver con las soluciones usuales que se han dado al problema del límite clásico y por qué no terminan de ser enteramente adecuadas. En la segunda parte abordamos el problema desde las diferentes interpretaciones de la mecánica cuántica, como la teoría de onda-piloto y las teorías de colapso objetivo. Después hacemos una revisión de las ventajas y desventajas que cada una de estas interpretaciones tiene para recuperar a la teoría clásica, y finalmente ofrecemos algunas conclusiones.

2. Las propuestas comunes para resolver el problema

En las fuentes estándar sobre la teoría cuántica frecuentemente uno se encuentra con la afirmación de que el problema del límite clásico ya se encuentra resuelto, y que de hecho se logró resolver en una época temprana de la teoría. Pero lo cierto es que no existe, en dichas fuentes, uniformidad sobre cómo resolver el problema, sino más bien nos encontramos con diferentes formas de aproximarse a éste. En esta sección vamos a presentar lo que consideramos las dos formas más típicas con las que se pretende resolverlo.

2.1 El "límite cuando $\hbar \to 0$"

Una de las soluciones que se suelen proponer, es considerar el caso en el que la constante de Planck $\hbar$ "tiende a un valor de cero", lo cual, básicamente, quiere decir que sustituimos en las ecuaciones que rigen la evolución de los estados cuánticos a dicha constante por cero. Recordemos muy brevemente que en la teoría cuántica estándar a cada sistema le corresponde (para todo instante de tiempo) un vector de estado Ψ, también llamado función de onda, a partir del cual podemos calcular la probabilidad de observar este o aquel resultado cuando realicemos una medición sobre dicho sistema. El vector de estado Ψ evoluciona de manera determinista de acuerdo con la ecuación de Schrödinger así

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \qquad \text{ec.(1)}$$

donde $\hat{H}$ es un operador hermitiano que representa a la energía total del sistema, llamado "hamiltoniano" y que explícitamente está dado por $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V$, siendo V el potencial que actúa sobre el sistema. En el espacio de coordenadas la ecuación de Schrödinger cobra la siguiente forma

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + V\Psi \qquad \text{ec.(2)}$$

Para obtener o recuperar a la dinámica clásica desde la ecuación (2) el argumento es como sigue (Sakurai 1994; Liboff 1984). Primero consideramos la representación polar de la función de onda, es decir que la escribimos así

$$\Psi = Re^{\frac{-iS}{\hbar}},$$

donde $R = R(\vec{r}, t)$ y $S = S(\vec{r}, t)$, son el módulo y la fase de la función de onda, respectivamente.

Ahora podemos sustituir esta representación de la función de onda en la ecuación de Schrödinger, y después de un poco de álgebra y considerar que el valor de $\hbar$ es despreciable (i.e. que se aproxima a cero), se llega a la siguiente ecuación para la fase S:

$$\frac{1}{2m}|\nabla S|^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad \text{ec.(3)}$$

Esta última expresión es formalmente idéntica a la ecuación clásica de Hamilton-Jacobi con la fase S jugando el papel de la función principal clásica. El punto es que la ecuación de Hamilton-Jacobi se utiliza para describir a los sistemas clásicos o newtonianos, y de hecho podemos pensarla como equivalente a las leyes del movimiento clásicas de Newton. Entonces el resultado es que después de considerar a la constante de Planck como despreciable, llegamos a que la fase de la función de onda cumple con una ecuación clásica de movimiento, y esto es el argumento, en rasgos generales, de cómo supuestamente recuperar a la mecánica clásica desde la teoría cuántica, de acuerdo con dicho criterio de que $\hbar \rightarrow 0$. Debemos decir que muchas veces el argumento no es meramente que "debemos tomar el límite cuando $\hbar \rightarrow 0$", sino que debido a las condiciones físicas del sistema, el valor de $\hbar$ puede ser despreciado (Sakurai 1994; Messiah 1999). Por ejemplo se considera el caso en que "el número cuántico principal n" , es muy grande, como un límite apropiado para considerar que $\hbar \approx 0$; o también el caso en que $\hbar|\nabla^2 S| \ll |\nabla S|^2$.

2.2 El teorema de Ehrenfest

La otra solución que es común encontrar en la bibliografía estándar tiene que ver con el llamado teorema de Ehrenfest, que dice lo siguiente. Sea un sistema físico con un estado cuántico dado por Ψ y sujeto a un potencial V, entonces la siguiente expresión es verdad para todo instante de tiempo (Griffiths 2005; Ballentine 1998):

$$\langle F \rangle = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle = m \frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} \quad \text{ec.(4)}$$

Con este resultado se suele argumentar que entonces los valores esperados del sistema "siguen las trayectorias clásicas". Esto tiene como base el hecho de que en la mecánica clásica las ecuaciones de movimiento están dadas por la expresión análoga: $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$. Así que con esto se pretende, de alguna manera, haber hecho una conexión entre la dinámica clásica y la cuántica, porque los valores de esperanza supuestamente siguen las mismas ecuaciones que sus contrapartes clásicas.

La primera observación que debemos hacer con respecto a este argumento es que la ecuación (4), de hecho no es enteramente análoga a la ecuación dinámica clásica. Para que esto fuera verdad debería cumplirse algo más fuerte, a saber

$$-\frac{\partial V(\langle x \rangle)}{\partial x} = m \frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} \quad \text{ec.(5)}$$

donde, crucialmente, ahora el lado izquierdo está evaluado en el valor esperado de x. Esto sí nos asegura que $\langle x \rangle$ seguirá la misma trayectoria que el valor clásico de la posición. Sin embargo la ecuación (5) no se cumple genéricamente para cualquier estado Ψ y potencial V, así que hace falta decir algo sobre cuándo sí es válida esta expresión.

Podemos ver fácilmente dos condiciones suficientes para que se cumpla la ecuación (5), que en adelante denotaremos como la versión fuerte del teorema de Ehrenfest. La primera condición es que el potencial sea (cuando mucho), una función cuadrática en la posición, es decir, de la forma $V = a + bx + cx^2$, con a, b y c constantes. De ser esto el caso, se tendría que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2cx,$$

de donde se sigue que $\left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle = 2c \langle x \rangle$, por lo cual se cumple $\left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial V(\langle x \rangle)}{\partial x}$. Así, para potenciales de este tipo, es verdad que los valores de esperanza siguen trayectorias clásicas. Un ejemplo de potenciales como éste, es el oscilador armónico $V = \frac{1}{2}kx^2$.

La segunda condición involucra no al potencial, sino a la función de onda. Supongamos que Ψ es una función concentrada alrededor de un punto x_0, es decir que rápidamente se aproxima a cero cuando nos alejamos de dicho punto. En este caso, se tendría lo siguiente

$$- \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle = -\int |\Psi|^2 \frac{\partial V}{\partial x} dx \approx \frac{\partial V(x_0)}{\partial x},$$

pero además, claramente se tiene que $\langle x \rangle \approx x_0$, así que $\left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle \approx \frac{\partial V(x_0)}{\partial x}$. Entonces podríamos estar justificados en considerar que las trayectorias de los valores esperados serán prácticamente iguales que las de la dinámica clásica, o sea, que se estaría cumpliendo nuevamente el teorema fuerte de Ehrenfest.

3. Dificultades para la soluciones comunes

Las dos propuestas que acabamos de ver para resolver el problema del límite clásico pueden ser bastante sugerentes, pero tenemos que hacernos la pregunta de si realmente nos han ayudado a recuperar o no la dinámica clásica. ¿Es verdad que podemos hablar de una reducción de teorías apelando al teorema (fuerte) de Ehrenfest o el límite cuando $\hbar \to 0$? ¿En verdad hemos derivado a la mecánica clásica desde la teoría cuántica con estas propuestas? Veamos primero el caso cuando $\hbar$ tiende a cero.

Se afirma que al obtener la ecuación (3), entonces podemos decir que el sistema es análogo a uno clásico, porque dicha expresión es igual a la ecuación clásica de Hamilton-Jacobi. Una dificultad para esta propuesta es de carácter más bien técnica y no repararemos mucho aquí en ella, pero es que pueden haber problemas de convergencia cuando consideramos que $\hbar \to 0$. Esto es porque la función de onda en general siempre depende de $\hbar$ (como se puede ver en su representación polar) (Holland 1993; Ballentine, Yang y Zibin 1994). Además existe el problema, más bien conceptual, de considerar que una constante de la naturaleza, como lo es $\hbar$, tenga diferentes valores, ¿qué significa exactamente que una constante pueda llevarse al límite cuando es cero? Pero al margen de estas cuestiones, aún así tenemos otra gran dificultad con esta propuesta, y es que si bien la ecuación (3) es análoga a la de Hamilton-Jacobi, ¿por qué esto querría decir que el sistema en cuestión puede considerarse como clásico y no cuántico? El problema que subyace a esto es que no tenemos una interpretación clara para la fase *S*, que es lo que está en juego en dicha ecuación. ¿Cuál es la conexión, pues, entre un sistema clásico y dicha fase cuántica *S*? Sin una manera de interpretar lo que significa esta fase, tampoco sabemos qué está diciendo esta ecuación y mucho menos podemos hacer una conexión directa con la mecánica clásica. El filósofo de la ciencia J. Rosaler aborda esta situación, cuando afirma que hablar de analogías entre la ecuación (3) y la ecuación clásica de Hamilton-Jacobi, puede considerarse como una reducción de tipo "formal", pero no "empírica". Con esto quiere decirse que no es suficiente tener una ecuación formalmente análoga a la dinámica clásica, sino que hace falta decir cómo el mundo descrito por esta ecuación se corresponde con los elementos de la mecánica clásica. Como dice Rosaler (Rosaler 2015):

"*La mecánica clásica está formulada en una arena matemática de variedades simplécticas, transformaciones canónicas, brackets de Poisson, principios de acción y cosas semejantes, mientras la mecánica cuántica está formulada en un lugar con espacios de Hilbert, transformaciones unitarias, conmutadores, integrales de camino, álgebras C*, (...) y otras estructuras relacionadas. ¿Qué conexiones, analogías y correspondencias podemos identificar entre estos dos esquemas matemáticos?*"[1]

Sobre la propuesta relacionada al teorema (fuerte) de Ehrenfest, hay otro tanto que decir al respecto. Por un lado tenemos el problema de que solamente hemos encontrado condiciones suficientes, pero no necesarias para supuestamente tener una dinámica clásica. Y por otro lado está el asunto de responder, cuándo estamos justificados en considerar que $\left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial V(\langle x \rangle)}{\partial x}$. Sabemos por ejemplo que si la función de onda asociada al sistema está concentrada alrededor de un punto x_0, entonces es válido el teorema fuerte de Ehrenfest, pero esto no nos dice realmente por qué es de esperar que los objetos descritos por la mecánica clásica, típica o comúnmente serán de este tipo. Dicho de otra forma, hace falta mostrar que, por lo menos en la mayoría de los casos, para los sistemas descritos clásicamente (por ejemplo aquellos conformados por un gran número de partículas), la función de onda asociada se encuentra siempre concentrada alrededor de algún punto. Sin embargo esto no es evidente, además de que en general, la función de onda de cualquier sistema, debido a la evolución dada por la ecuación de Schrödinger, tiende a dispersarse con el paso del tiempo, y no a concentrarse en algún punto particular (de hecho es por esta razón que Schrödinger desistió en sus intentos por proveer a la teoría cuántica con una interpretación en términos de densidades de carga (Allori et al. 2011)). Más aún, incluso si los sistemas que querríamos considerar como clásicos, tuvieran siempre una función de onda que cumpla con el teorema fuerte de Ehrenfest, también haría falta responder a los cargos que levanta Rosaler. Nos faltaría explicar por qué si los valores de esperanza evolucionan como sus contrapartes clásicas entonces el sistema se comporta de forma clásica. Por ejemplo, si el valor esperado de un sistema evoluciona como una partícula clásica libre, i.e., como $\langle x \rangle = vt$, entonces ¿podemos decir que dicho sistema es una partícula libre clásica y no ya un sistema cuántico? No es claro que esto sea el caso, porque no se ha hecho una correspondencia entre el formalismo cuántico y la mecánica clásica, que nos permita evaluar el contenido empírico de una descripción en términos de funciones de onda, valores de expectación, observables cuánticos, etc., y en el contexto de los elementos de la mecánica clásica. En pocas palabras, hace falta responder a la pregunta ¿cómo podemos interpretar en términos clásicos al valor

[1] "Classical mechanics is formulated in a mathematical arena of symplectic manifolds, canonical transformations, Poisson brackets, action principles and the like, while quantum mechanics is formulated in a realm of Hilbert spaces, unitary transformations, commutators, path integrals, C* algebras, (...) and related structures. What connections, analogies and correspondences can we identify between these two mathematical frameworks?"

esperado? Si no podemos responder esta pregunta, entonces no estamos cerca de haber derivado a la teoría clásica desde la mecánica cuántica.

Esto último es muy similar a la crítica que hicimos del caso cuando $\hbar \to 0$, en el sentido de que parece haber una deficiencia interpretativa, que no nos permite acercarnos al contenido empírico de las expresiones formales como la ecuación (3). Lo que está ocurriendo aquí, y esta es parte de nuestra tesis, es que los problemas conceptuales de la mecánica cuántica son un grave obstáculo para poder decir algo del mundo macroscópico o clásico. La cuestión de fondo es que hay serios problemas para darle una clara interpretación a los valores de esperanza y a la misma función de onda, que se encuentran en el corazón de la teoría cuántica. Esto es, por lo menos en parte, lo que se conoce como el problema de la medición, que tiene que ver con cómo entender a la función de onda (Okon 2014; Maudlin 1995; Bell 1990). La otra parte del problema de la medición, si se quiere ver así, está relacionada con una cierta vaguedad en las reglas para la evolución dinámica de Ψ, que en la teoría estándar está regida por la ecuación (1), más el llamado postulado del colapso. Cuando realizamos una medición, de acuerdo con este postulado, la función de onda abruptamente cambia de estar en una superposición de estados (a menos de que inicialmente no estuviera en una), hacia el vector que se corresponde con el resultado observado en la medición. La dificultad con esto, brevemente, es que la evolución depende de la noción de "medición", pero dicho concepto no está bien definido dentro de la teoría.

Debido a todos estos problemas, creemos que es mucho más conveniente y enriquecedor analizar el problema desde los formalismos alternativos de la mecánica cuántica, en donde no hay estas carencias interpretativas de la teoría estándar. Por eso ahora veremos qué se puede decir sobre el límite clásico desde dos de estas teorías: la teoría de onda-piloto y la teoría de GRW.

4. Formalismos alternativos

En esta sección vamos a recapitular, de manera muy breve, los principios básicos de la teoría de onda-piloto, también conocida como mecánica de Bohm, y de la teoría de colapso objetivo GRW. Ambas teorías modifican de alguna manera al formalismo estándar, preservando todos sus resultados, pero de tal manera que resuelven las dificultades relacionadas al problema de la medición.

4.1 La teoría de onda-piloto

La teoría de onda-piloto fue desarrollada en la década de los 50s por el físico David Bohm (Bohm 1952a; 1952b). En esta teoría se considera que las partículas, no solo tienen asociada una función de onda, sino que además están de hecho bien localizadas en el espacio; es decir, que les podemos asignar una posición para todo instante de tiempo $Q(t)$. A las posiciones de las partículas se les conoce como "variables ocultas". El estado completo de un sistema comprende entonces estas dos cosas, la función de onda y la posición de las partículas (Ψ, Q). La dinámica de la función de onda está dada exclusivamente por la ecuación (1), así que nunca hay colapsos en esta teoría (ni siquiera cuando "se realizan mediciones"). Además se postula una ecuación de evolución para la posición de las partículas, que viene dada en términos de la función de onda así

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\hbar}{m} Im(\frac{\nabla\Psi}{\Psi})Q \qquad \text{ec.(6)}$$

donde m es la masa, e Im es el operador que nos devuelve la parte imaginaria de un número complejo (i.e. si $z = a + ib$, entonces $Im(z) = b$).

Como ya dijimos, la mecánica de Bohm recupera o reproduce todos los resultados de la mecánica cuántica. Esto se logra mediante la llamada "hipótesis de equilibrio", según la cual, es verdad que en algún instante de tiempo t_0 se cumple que

$$\rho(Q(t_0), t_0) = |\Psi(t_0)|^2,$$

donde ρ es la distribución de las partículas en el espacio tridimensional ordinario. Ya que la función de onda evoluciona de acuerdo a (1), basta con que se cumpla la expresión anterior en algún tiempo t_0, para que de hecho la distribución ρ siempre sea igual que $|\Psi|^2$.

El problema de la medición queda resuelto en este formalismo, porque no hace falta decir nada de colapsos que ocurren debido a mediciones, observaciones, ni ninguna otra cosa que esté, por así decirlo, más allá de los elementos mismos de la teoría. La ontología de la teoría, o su interpretación empírica, también es precisa y clara, en el sentido de que se postulan como elementos físicos objetivos a las posiciones de las partículas. Ahora bien, aún faltaría por especificar, tal vez, exactamente qué es la función de onda en esta teoría. Para lo cual se han propuesto diferentes cosas, como que ésta es solamente algo que "guía" a las partículas, pero que no tiene en sí una realidad física. Hay posturas también, más realistas, que afirman que la función de onda sí tiene un carácter físico (Manero 2019). Sin embargo, al margen de esto, el contenido empírico de la teoría es claro y explícito en tanto a las posiciones de las partículas, así que se encuentra mucho mejor equipada en este sentido que la teoría estándar.

4.2 La teoría de GRW

En la década de los 80s, los físicos G. Ghirardi, A. Rimini y T. Weber, desarrollaron otro formalismo alternativo, que se conoce como GRW (por los apellidos de los autores) (Ghirardi, Rimini y Weber 1986). En esta teoría se modifica la dinámica de la función de onda, pero no se agregan otros elementos o variables ocultas. De acuerdo con este formalismo, toda partícula tiene una cierta probabilidad por unidad de tiempo, τ, de espontáneamente "sufrir un colapso". Este colapso tiene como consecuencia que la función de onda asociada se concentre alrededor de un punto x_0, que llamamos el centro del colapso. Formalmente, si al instante t_0 ocurre uno de estos colapsos, entonces la función de onda cambia así

$$\Psi(t_0) \rightarrow \Psi' = j(x - x_0)\, \Psi(t_0),$$

donde la función j, es una gaussiana, centrada en el punto x_0, y con un ancho dado por δ. A las constantes τ y δ, se les considera como nuevas constantes de la naturaleza, y su valor aún no está fijado, pero se han propuesto como valores tentativos $\delta = 10^{-5} cm$ y $\tau = 10^{-16} s^{-1}$. Por último, se estipula que la probabilidad de que el centro del colapso sea x_0 está dada por $P(x_0) = |\Psi'(x_0)|^2$.

Con dicho valor propuesto para la frecuencia de los colapsos τ, una sola partícula podría tardar millones de años en sufrir un colapso. Sin embargo, si consideramos un conjunto de N partículas, entonces la probabilidad de que alguna de ellas sufra un colapso aumenta proporcionalmente con N. Para un típico cuerpo macroscópico, que cuenta con $N \approx 10^{25}$ partículas, la frecuencia con la que ocurriría un colapso para alguna de ellas, sería $10^4 s^{-1}$, es decir que se tendría un colapso dentro de una pequeña fracción de segundo. Esto es muy importante porque de esta forma la teoría resuelve el problema de las superposiciones macroscópicas. Si bien un cuerpo macroscópico, por ejemplo un gato, podría encontrarse en una superposición de estados distintos (como vivo y muerto), esta superposición no duraría más que una fracción de segundo, después de la cual ocurriría espontáneamente un colapso, que lo llevaría al estado de vivo o muerto.

Así entonces la teoría de GRW resuelve el problema dinámico de los colapsos sin apelar a mediciones, observaciones, agentes conscientes, ni ninguna otra cosa semejante. Las reglas de cuándo y cómo ocurren los colapsos de la función de onda son matemáticamente precisas y claras. Además, se rescatan los resultados del formalismo estándar gracias a la ecuación de la probabilidad para que el centro del colapso sea un punto x_0, que es proporcional al cuadrado de la función de onda. Aun así, a la teoría parece faltarle algo más para poder realmente hacer contacto empírico con el mundo, porque ¿qué interpretación tiene la función de onda?, ¿qué ontología o elementos de la realidad física postula que existen la teoría? Para resolver estas preguntas, G. Ghirardi consideró agregar otro ingrediente al formalismo (Ghirardi, Grassi, Benatti 1995): una distribución de masa en el espacio físico ordinario, que se construye a partir de Ψ. Para un sistema de N partículas, cada una con masa m_i, dicha distribución de masa está dada por

$$m(x,t) = \sum_{i=1} \quad m_i \int \qquad d^3r_1 \ldots d^3r_N \delta(r_i - x) |\Psi(r_1, \ldots, r_N)|^2,$$

donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac.

Ya contando con esta distribución $m(x,t)$ y reglas dinámicas explícitas para los colapsos de la función onda, la teoría de GRW pretende resolver el problema de la medición. Esta variante de la teoría se conoce como GRW con densidad de masa, y suele escribirse como GRW_m. Aunque también es cierto que esta teoría no se encuentra exenta de controversias o posibles problemas. Notablemente existe el llamado Problema de las Colas y también el Problema de las Colas Estructuradas, que a grandes rasgos tienen que ver con el hecho de que los colapsos espontáneos no eliminan por completo a las superposiciones cuánticas, porque la función gaussiana $j(x)$ nunca es igual a cero, así que la función de onda post-colapso tampoco será estrictamente cero para ninguna de las ramas de la superposición, sino que a lo mucho, se concentrará alrededor de alguna de ellas, dando lugar así a "colas" de pequeña amplitud (McQueen 2015). En el ejemplo clásico del gato vivo y muerto, esto quiere decir que después del colapso de hecho tendremos a un gato con la mayor parte de la masa total del sistema, y al otro gato con una cantidad muy pequeña de la masa. Nunca se esfumará por completo ninguno de los dos gatos (Maudlin 2010).

Por último mencionamos que existen también otras posibilidades para añadirle una ontología a la teoría (Maudlin 2010; Allori et al. 2008), por ejemplo también se tiene la llamada ontología de flashes, según la cual lo que existe realmente en el mundo son solamente los centros de los colapsos x_0. A esta segunda variante se le conoce como GRW con densidad de flashes, escrita como GRW_f.

5. El límite clásico en la Teoría de Onda-Piloto y GRW

Ahora vamos a discutir cómo se puede abordar el problema del límite clásico, a partir de las dos alternativas al formalismo cuántico estándar que acabamos de ver. De las dos variantes aquí mencionadas, en la que más se ha trabajado sobre el límite clásico es la teoría de onda-piloto, pues en GRW parece que el problema no se ha estudiado con tanta profundidad. Comenzamos entonces con lo que se ha hecho en la teoría de onda-piloto.

El mismo David Bohm parece haber sido el primero en analizar cómo se puede recuperar a la mecánica clásica desde su teoría cuántica (Bohm y Hiley 1995; Holland 1993). Su propuesta es sencilla de entender y derivar, aunque las condiciones que impone para recuperar la dinámica clásica pueden resultar muy restrictivas. Veamos primero que como en esta teoría las partículas sí cuentan con una posición bien definida, entonces tiene perfecto sentido considerar su derivada con respecto del tiempo (algo que no ocurre por supuesto en la teoría estándar); por esta razón podemos tomar la derivada (de ambos lados) de la expresión (6), para obtener lo siguiente

$$m\frac{d^2Q}{dt^2} = -\nabla V + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R},$$

donde R es la parte radial de la función de onda. Ahora bien, el término $-\nabla V$ es simplemente lo que consideraríamos la fuerza que resulta del potencial externo V, o por así decirlo, la fuerza clásica; mientras que el segundo término del lado derecho suele pensarse como una "fuerza cuántica", y que depende solamente de la función de onda. Esto quiere decir que en la teoría de onda-piloto tenemos siempre dos elementos que determinan la dinámica de la posición Q de las partículas, una que viene por el potencial externo y otro que es intrínseco al sistema, porque solo involucra a la parte radial de Ψ. Si escribimos respectivamente a estas dos fuerzas como F y F_Q, entonces la expresión anterior es como sigue

$$m\frac{d^2Q}{dt^2} = F + F_Q.$$

Así que Bohm sugiere considerar como una condición para recuperar a la mecánica clásica, el caso en el que $F_Q = 0$. Esto querría decir que la posición Q evolucionaría de forma estrictamente idéntica a cómo ocurre en la mecánica clásica, porque solo tendríamos a la fuerza que resulta del potencial externo *V*.

Si aceptamos sin más la propuesta de Bohm, que sin duda parece ser mucho más clara que lo que se tiene en el formalismo estándar, entonces solamente faltaría (y esto es muy importante), explicar por qué para cuerpos macroscópicos es de esperar que la fuerza cuántica sea igual a cero. Es decir, si para un sistema conformado por un gran número de partículas *N*, es verdad que típica o comúnmente la fuerza cuántica asociada con él es igual a cero, entonces realmente estaríamos en una buena posición para afirmar que hemos derivado la mecánica clásica desde el formalismo bohmiano. Sin embargo, aquí queremos resaltar una cuestión importante, y es que demandar que la fuerza cuántica sea estrictamente cero es un criterio demasiado exigente. Es difícil creer que para la mayoría de los casos que queremos considerar como macroscópicos o clásicos, será cierto que $F_Q = 0$; este criterio puede ser muy preciso y claro, pero tal vez no sea realmente muy útil porque termina siendo muy restrictivo.

Tal vez un mejor criterio, porque es más laxo, es el que han trabajado recientemente autores como V. Allori, *et al*, igualmente dentro del contexto de la teoría de onda-piloto (Allori et al. 2002). El criterio para recuperar la dinámica clásica, de acuerdo con esta propuesta es que

$$m\frac{d^2Q}{dt^2} \approx F \qquad \text{ec.(7)}$$

o en otras palabras, que $F_Q \approx 0$, lo cual es ciertamente menos restrictivo que el criterio de Bohm. Lo que se necesita luego, es investigar bajo qué condiciones podemos esperar que se cumpla la ecuación (7). Para ello, se comienza por analizar el caso de una sola partícula con función de onda ψ (en una sola dimensión por simplicidad), que cumple con

$$m\frac{d^2 \langle Q \rangle}{dt^2} = \int F(x)|\psi|^2 dx \quad ,$$

y remarcamos que en este caso *x* representa simplemente a la variable de la posición, y no la posición real *Q* de la partícula. Si expandimos en serie de Taylor a *F* alrededor de $\langle Q \rangle$, tenemos que

$$m\frac{d^2 \langle Q \rangle}{dt^2} = F(\langle Q \rangle) + \frac{1}{2}\sigma^2 F''(\langle Q \rangle) + \ldots \qquad \text{ec.(8)}$$

donde $\sigma^2 = \langle Q - \langle Q \rangle^2 \rangle^2$, es la desviación estándar para el estado ψ. Supongamos, después, que se cumple la ecuación (7), por lo que si tomamos el valor esperado de ambos lados de la igualdad, debe ser cierto que los términos de orden superior en el lado derecho de (8) son despreciables con respecto del primero, i.e. es verdad que

$$\sigma^2 F''(\langle Q \rangle) \ll F(\langle Q \rangle),$$

y esto implicaría que

$$\lambda \ll \sqrt{\left|\frac{V'}{V'''}\right|} \qquad \text{ec.(9)}$$

porque la longitud de onda λ es proporcional a σ^2.

La ecuación (9) es entonces una condición necesaria, de acuerdo con este criterio, para tener que la posición evoluciona de manera clásica. Pero también se puede ver que es igualmente una condición suficiente para ello, aunque la demostración de esto es más rebuscada, así que aquí solo referimos al lector interesado hacia el texto pertinente (Allori et al. 2002).

Ahora pasamos a la propuesta en el contexto de la teoría de GRW, que como ya dijimos, no se ha estudiado con tanto detalle como el caso de la teoría de onda-piloto, pero aún así es muy interesante analizar lo que ocurre para esta teoría.

El trabajo original en donde se formuló por primera vez la teoría de GRW, notablemente, lleva por título "Dinámica Unificada para sistema microscópicos y macroscópicos"[2], lo cual apunta a que los autores tenían en mente, tal vez, algo así como una reducción de la mecánica clásica (para objetos macroscópicos) a la cuántica (para sistemas microscópicos). Pero además de presentar su novedoso formalismo, ¿qué se dice en este artículo específicamente sobre la unificación de las teorías cuántica y clásica? En el trabajo se encuentran pocas menciones directas sobre cómo recuperar a la dinámica clásica desde el nuevo formalismo. Más bien parece que los autores se contentaron con apelar a una demostración que involucra de nueva cuenta al teorema de Ehrenfest. Veamos esto.

Primero se demuestra que para un sistema de N partículas, la función de onda asociada con su centro de masa evoluciona de manera idéntica que cualquiera de las otras partículas que lo componen. Si escribimos la ecuación dinámica de GRW en términos de la llamada matriz de densidad ρ

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = \hat{H}\rho + \hat{T}\rho \qquad \text{ec.(10)}$$

con el operador $\hat{T}$ siendo el responsable de los colapsos, entonces se puede mostrar que la matriz de densidad asociada con el centro de masa ρ_{cm} del sistema sigue la ecuación análoga

$$i\hbar \frac{d\rho_{cm}}{dt} = \hat{H}_{cm}\rho_{cm} + \hat{T}\rho_{cm},$$

donde $\hat{H}_{cm}$ es el hamiltoniano correspondiente al centro de masa.

Ya con este resultado, lo que se arguye después es que la nueva dinámica también implica que se cumple el teorema de Ehrenfest (esto es, la versión ``no fuerte" del teorema). Esto quiere decir que si la función de onda de un sistema evoluciona de acuerdo con (10), entonces también se cumplirá la expresión (4). Y ya que la matriz de densidad asociada con el centro de masa ρ_{cm} realmente sigue una ecuación de evolución igual a (10), entonces se sigue que también ésta debe de cumplir con el teorema de Ehrenfest. La conclusión es que el

[2] "Unified Dynamics for Microscopic and Macroscopic Systems."

centro de masa de un sistema con un gran número N de partículas, seguirá una trayectoria clásica, en vista de que cumple con el teorema (4).

6. Discusión

Sabemos que desde los comienzos de la teoría cuántica, se ha tenido la pretensión de recuperar a la mecánica clásica. O por lo menos de alguna manera hacer contacto con ella, ecos de lo cual podemos encontrar en los trabajos de Bohr, donde propone que en última instancia, los resultados experimentales siempre tendrán que explicarse en términos clásicos y no cuánticos. Sin embargo, las soluciones típicas o comunes que se suelen dar para este problema son bastante deficientes. Ya vimos que el "límite cuando $\hbar \to 0$" , deja mucho que desear. Si bien la ecuación (3) es de la misma forma que la ecuación clásica de Hamilton-Jacobi, esto no nos dice realmente que ahora el sistema se esté comportando de manera clásica, pues, ¿cual es la conexión entre la fase S de la ecuación (3) y su "contraparte clásica" la función principal de Hamilton? La relación entre estas dos cosas nunca es clara, ¿por qué debemos de considerar a la fase cuántica como la función principal clásica cuando tomamos $\hbar \to 0$? Sobre estas preguntas, dicho enfoque no nos proporciona ninguna respuesta. Lo anterior tal vez no es tan sorprendente, cuando recordamos que dentro del contexto del formalismo estándar, la interpretación de elementos teóricos como la función de onda es todo menos clara y precisa. Recordemos que una derivación o reducción "formal", no es lo mismo que una empírica, como dice Rosaler. Así que, si ni siquiera podemos interpretar claramente a Ψ, entonces ¿qué sentido tiene hablar de una reducción entre teorías, una de las cuales habla sobre funciones de onda, observables, valores esperados, etc., mientras que la otra habla de partículas puntuales, espacios fase, líneas de mundo, etc.? En otras palabras, la mecánica clásica es tan diferente de la teoría cuántica, que resulta muy pobre solamente apuntar hacia una semejanza entre un par de sus ecuaciones dinámicas.

Sobre el teorema (fuerte) de Ehrenfest podemos decir básicamente lo mismo que sobre el límite cuando $\hbar \to 0$, ya que esta propuesta también se hace desde el marco del formalismo estándar. Sin embargo, este enfoque tiene un poco más de mérito, porque las ecuaciones de evolución tratan sobre los observables, para los cuales, aunque también de manera problemática, tenemos una idea más precisa de cómo se conectan con sus análogos clásicos. Es decir, si bien permanecen aquí los problemas interpretativos del formalismo estándar, por lo menos al hablar de valores de esperanza (por ejemplo para la posición y el momento) que siguen trayectorias clásicas, parece que nos acercamos un poco más a tender un puente empírico o conceptual entre la mecánica clásica y la teoría cuántica. Pero de todas formas este enfoque va a tener que lidiar con las mismas críticas que hicimos anteriormente, esto es inevitable, porque seguimos dentro de la teoría estándar. Además, otro problema con estos dos enfoques, y que también va a ser muy relevante para la teoría de onda-piloto y GRW es que ninguno especifica por qué, genéricamente, esperaríamos que el régimen de lo que consideramos como clásico (por ejemplo el de los cuerpos macroscópicos), se caracterice por las mismas condiciones físicas que dan lugar a que se cumpla el teorema fuerte de Ehrenfest o que $\hbar \to 0$. Es decir, se necesita aclarar que el "mundo clásico", es tal, que se cumplen las condiciones para tener (3) y/o (5).

En el caso de la teoría de onda-piloto la situación es mucho más favorable, principalmente porque existe un "puente empírico" claro entre ésta y la teoría clásica, a saber, las posiciones de las partículas. Esto permite que se pueda formular un criterio más satisfactorio para tener un comportamiento clásico, que es la ecuación (7) en su versión débil, o con F_Q estrictamente igual a cero en su versión más fuerte. Ya vimos que el problema con esta versión más fuerte del criterio de clasicalidad es que realmente es muy restrictivo, y nos dejaría con muy pocos casos que podríamos considerar entonces como clásicos. La versión más débil no tiene este problema, así que en este sentido resulta más satisfactoria. Aún así faltan cosas por aclarar. Sobre todo lo que tiene ver con la caracterización del régimen clásico. Si bien podemos afirmar que una condición necesaria y suficiente para que se cumpla la ecuación (7) es tener que $\lambda \ll \sqrt{\left|\frac{V'}{V'''}\right|}$, de todas maneras hace falta un paso extra, por así decirlo, que es determinar por qué las cosas que consideramos clásicas efectivamente cumplen con este criterio. A esto es a lo que apuntan los autores de (Allori et al. 2002) cuando dicen que

"El contenido matemático (de este trabajo) se resume con la siguiente (todavía no formulada claramente) conjetura: (...) Existen interacciones ambientales tales que $F_Q \to 0$ cuando $\lambda/\sqrt{\left|\frac{V'}{V'''}\right|} \to 0$ uniformemente en Ψ y V."

Como vemos en esta cita, el problema es definir precisamente cuáles son esas "interacciones del ambiente", que nos aseguran se cumplirá el criterio de clasicalidad $F_Q \to 0$. La dificultad en hacer esto, en última instancia, radica en poder caracterizar al régimen clásico. Los objetos en este régimen, de acuerdo con la conjetura, deberían de ser tales que el sistema en cuestión cumpliera con el criterio de clasicalidad, pero ¿cuáles son esas interacciones?, ¿cuándo o bajo qué condiciones tienen lugar? y más crucialmente ¿cómo podemos estar seguros que aquello que consideramos como "clásico" realmente está sujeto a esas interacciones? Tal vez mencionar aquí un ejemplo de reduccionismo en la física pueda ilustrar mejor este punto. La teoría de la relatividad especial puede recuperar a la dinámica newtoniana, cuando se considera el caso en que la velocidad del sistema es mucho menor que la de la luz. En ese caso las ecuaciones de movimiento son aproximadamente iguales a las expresiones clásicas. Esto quiere decir que el régimen clásico, en distinción al relativista, está caracterizado por velocidad bajas en comparación con la de la luz. El problema para hacer lo mismo en la mecánica cuántica es que no sabemos cuál es la condición análoga a que "la velocidad sea mucho menor que la de la luz", es decir que no tenemos un criterio claro para delinear las fronteras entre el mundo cuántico y el clásico. Pero suponiendo que tuviéramos esto, o sea, si pudiéramos caracterizar efectivamente al régimen clásico (por ejemplo pidiendo que el sistema tenga un gran número de partículas, o algo semejante), y después mostráramos que si esto es el caso, entonces el sistema cumple con el criterio de la ecuación (7), así pues, tendríamos verdaderamente una fundación muy sólida para decir que hemos recuperado a la mecánica clásica desde la cuántica.

Podríamos pensar en todo esto como una reducción inhomogénea al estilo del filósofo de la ciencia E. Nagel, y que sigue muy de cerca al modelo nomológico deductivo de Hempel (Nagel 2008; 1949). Esquemáticamente se tendría lo siguiente

- P1: Un sistema se comporta de manera clásica si y sólo si $F_Q \approx 0$.
- P2: Para toda función de onda Ψ y potencial externo V, se tiene que $F_Q \approx 0$ si y sólo si $\lambda \ll \sqrt{\left|\frac{V'}{V'''}\right|}$.
- P3: Todo sistema clásico cumple que $\lambda \ll \sqrt{\left|\frac{V'}{V'''}\right|}$, que podemos llamar la "Caracterización del Régimen Clásico" (CRC).
- Conclusión: para todo sistema clásico, i.e. que cumple con (CRC), se tiene que $F_Q \approx 0$.

Una gran dificultad con este modelo de reducción es que no es evidente o inmediato, que la proposición 3 es verdadera, ¿cómo estamos seguros que realmente cualquier sistema clásico cumple que $\lambda \ll \sqrt{\left|\frac{V'}{V'''}\right|}$? . El problema entonces para la teoría de onda-piloto en particular, y para cualquier otra propuesta en general, es definir adecuadamente a (CRC). Por ejemplo en el caso de la relatividad especial, esta condición es simplemente que el sistema tenga una velocidad mucho menor que la de la luz. Cualquier sistema bajo la dinámica newtoniana, se puede caracterizar efectivamente por este criterio de su velocidad, luego solo hace falta mostrar que si esto es verdad entonces se pueden recuperar las ecuaciones clásicas del movimiento desde la teoría de la relatividad, como de hecho se puede hacer. Así, lo que necesitamos es caracterizar de igual manera al régimen clásico, *en distinción con el cuántico*, y después mostrar que para todo sistema cuántico, bajo esas condiciones, se cumple que $\lambda \ll \sqrt{\left|\frac{V'}{V'''}\right|}$. Este criterio podría ser algo como que el sistema tenga un gran número de partículas, o que tenga una masa mucho mayor a un cierto valor crítico, etc.

Por último hace falta decir algo sobre la propuesta de GRW (con densidad de masa). En este caso la propuesta es mucho menos detallada que en la teoría de onda-piloto, y se limita meramente a apelar al teorema (débil) de Ehrenfest. Por esta razón, la propuesta aquí es mucho menos satisfactoria que en la teoría de onda-piloto. Aunque, aún así, creemos que es posible para esta teoría el formular criterios de clasicalidad más robustos que en el formalismo estándar, porque en GRW_m sí se cuenta con una interpretación (y dinámica) clara para la función de onda. O en otras palabras, en esta teoría, la ontología sí existe y es precisa, por lo que puede resultar más fácil tender algún puente entre ella y la teoría clásica, como de hecho era la intención original de sus creadores. Pero incluso si desde la teoría de GRW se pudiera formular un criterio análogo a la ecuación (7), de todas forma sería necesario también especificar cuáles son las características que distinguen al régimen clásico del cuántico, para luego mostrar que bajo dichas condiciones se cumpliría el (aún no formulado) criterio de clasicalidad. Dejamos para un trabajo posterior cuál podría ser un esbozo de este criterio para la teoría de GRW_m.

Referencias bibliográficas

Allori, V., Goldstein, S., Dürr, D., Zanghi, N. (2002). Seven steps toward the classical world. *J. Opt. B*, 4, 482–88. doi: https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/4/344.

Allori, V., Goldstein, S., Tumulka, R., Zanghi, N. (2008). On the Common Structure of Bohmian Mechanics and the Ghirardi–Rimini–Weber Theory. *British Journal for the Philosophy of Science*, 59, 353–89. doi: https://doi.org/10.1093/bjps/axn012.

Allori, V., Goldstein, S., Tumulka, R., Zanghi, N. (2011). Many-Worlds and Schrödinger's First Quantum Theory. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 62 (1), 1-27. doi: https://doi.org/10.1093/bjps/axp053.

Ballentine, L. (1988). *Quantum Mechanics. A Modern Development*. World Scientific Publishing.

Ballentine, L., Yang, Y., Zibin, J. (1994). Inadequacy of Ehrenfest's theorem to characterize the classical regime. *Phys. Rev. A*, 50, 2854. doi: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.50.2854.

Bell, J. (1990). Against 'measurement'. *Physics World*, 3(8): 33–40. doi: 10.1088/2058-7058/3/8/26.

Bohm, D. (1952). A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables: Part I. *Phys. Rev.* 85, 166–79. doi: https://doi.org/10.1103/PhysRev.85.166.

Bohm, D. (1952). A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables: Part II. *Phys. Rev.* 85, 180–93. doi: https://doi.org/10.1103/PhysRev.85.180.

Bohm, D., Hiley, B. (1995). *The Undivided Universe*. Routledge.

Bokulich, A. (2008). *Reexamining the Quantum-Classical Relation: Beyond Reductionism and Pluralism*. Cambridge: Cambridge University Press. doi: https://doi.org/10.1017/CBO9780511751813.

Ghirardi, G., Rimini, A., Weber, T. (1986). Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems. *Phys. Rev. D* . 34, 470. doi: https://doi.org/10.1103/PhysRevD.34.470.

Ghirardi, G., Grassi, R., Benatti, F. (1995). Describing the Macroscopic World: Closing the Circle within the Dynamical Reduction Program. *Foundations of Physics*, 25(1), 5–38. doi:https://doi.org/10.1007/BF02054655.

Griffiths, D. (2005). *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson.

Holland, P. (1993). *The Quantum Theory of Motion*. Cambridge University Press.

Jammer, M. (1966). *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. New York: McGraw Hill Book Co. doi: https://doi.org/10.1063/1.3034186.

Liboff, R. (1984). The correspondence principle revisited. *Physics Today*, 37, 50–55. doi: https://doi.org/10.1063/1.2916084.

Manero, J. (2019). Imprints of the underlying structure of physical theories. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*. 68, 71-89. doi: https://doi.org/10.1016/j.shpsb.2019.06.005.

Maudlin, T. (1995). Three measurement problems. *Topoi,* 14, 7–15. doi: https://doi.org/10.1007/BF00763473.

Maudlin, T. (2010). Can the world be only wavefunction?. En S. Saunders, J. Barrett, A. Kent, D. Wallace (Eds.), *Many Worlds. Everett, Quantum Theory and Reality*, pp. 121-144. Oxford University Press.

McQueen, K.J. (2015). Four Tails Problems for Dynamical Collapse Theories. *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics*, 49, 10-18. doi: https://doi.org/10.1016/j.shpsb.2014.12.001.

Messiah, A. (1999). *Quantum Mechanics*. Dover Publications.

Nagel, E. (1949). The Meaning of Reduction in the Natural Sciences. En C. Stauffer (Ed.), *Science and Civilization*, pp. 97-135. Madison: University of Wisconsin Press.

Nagel, E. (2008). Issues in the Logic of Reductive Explanations. En M. Bedau, P. Humphreys (Eds.), *Emergence: Contemporary Readings in Philosophy and Science*, pp. 359-375. MIT Press.

Okon, E. (2014). El problema de la medición en mecánica cuántica. *Rev. Mex. Fis. E*, 60 (2).

Rosaler, J. (2015). 'Formal' versus 'Empirical' Approaches to Quantum-Classical Reduction. *Topoi*, 34 (2), 325–38. doi: https://doi.org/10.1007/s11245-015-9328-1.

Rosenfeld, L. (1979). The Wave-Particle Dilemma. En R. Cohen, J. Stachel (Eds.), *Selected Papers of Léon Rosenfeld, Boston Studies in the Philosophy of Science*, pp.688-703. Springer, Dordrecht. doi: https://doi.org/10.1007/978-94-009-9349-5_49.

Sakurai, J. (1994). *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley.