Publicado en:
Diánoia, vol. 34, no. 34, 1988, pp. 141-168.

EN BUSCA DEL CONTENIDO FÍSICO DE LA REGLA DE LUDERS *

SERGIO MARTÍNEZ

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

1. *Introducción*

Las mediciones preparatorias son aquellas a partir de las cuales es posible concluir, con base en el resultado obtenido, que el sistema se halla (inmediatamente después de la medición) en un estado-propio del valor-propio que corresponde a dicho resultado. Las mediciones preparatorias son, antes que nada, procesos experimentales que seleccionan una colectividad a la cual es posible asignar un estado cuántico (estadístico). En el caso de las interpretaciones estadísticas del vector de estado, la asignación de un estado cuántico a (sub)colectividades seleccionadas por procedimientos experimentales, es fundamental. Pero, si negamos la existencia de variables ocultas, debería ser posible interpretar las mediciones preparatorias en función de las transformaciones del estado individual. Esto puede hacerse posible si se considera a estas mediciones como transformaciones de una medición idealizada que satisfaga la llamada *condición de primer tipo*: la repetición inmediata de una misma medición da el mismo resultado que el de la primera medición. Aquí supondremos (para evitar mayores complicaciones) que esta idealización está fuera de controversia. Más aún, supondremos que es posible representar toda medición como una medición de primer tipo; así pues, en este estudio, toda "medición" será siempre una "medición de primer tipo".

Von Neumann (1955) sostenía que, en el caso de las mediciones de magnitudes máximas (*i. e.*, magnitudes sin ningún valor-propio degenerado), el estado final se obtiene por el estado-propio (único)

* Este artículo se compone, en su mayoría, de material extraído de mi disertación (Martínez (1987)), dirigida por Linda Wessels y Geoffrey Hellman. Aparece también en *Synthese*, Vol. 82, núm. 1, enero de 1990, con el título "The Physical Content of Luder's Rule". ©1990 Kluwer Academic Publishers. Traducción autorizada.

del valor-propio que representa al resultado de la medición. Ésta es la regla de proyección de Von Neumann para la asignación de un estado final al efectuar una medición (máxima). En el caso de las mediciones de primer tipo, la regla se desprende directamente del supuesto básico de la mecánica cuántica, según el cual si un sistema tiene con certeza (con probabilidad de uno) un cierto valor-propio, entonces el sistema se halla en un estado-propio de dicho valor-propio.

Von Neumann sugirió (en 1955) que las mediciones no-máximas fueran consideradas como mediciones máximas con menos de la información total de (la naturaleza de) la medición. Para Von Neumann, una medición no-máxima es una medición máxima disfrazada. Así pues, la regla de Von Neumann, aplicada a mediciones no-máximas, seleccionaría el estado final posterior a la medición con base en la magnitud máxima implícitamente medida. Al parecer, fue Luders (en 1951) el primero en plantear la necesidad de un principio que, en mecánica cuántica, describiera las mediciones no-máximas *reales*: aquellas mediciones que, según es de suponer, se efectúan independientemente de la medición de una magnitud máxima.

Como mostraré en la próxima sección, Luders intentó justificar la regla que proponía, interpretándola como una regla que describe un cambio del estado estadístico a partir de la medición, y que generaliza el proceso de preparación del estado. En efecto, de esta manera la regla de proyección de Luders encuentra una sólida justificación. Pero aún queda pendiente un punto muy importante que es el origen de un prolongado debate respecto del postulado de proyección: el problema de cómo definir el proceso físico que la regla de Luders pretende describir como transformación de sistemas individuales. Para poder definir la regla de Luders como una regla que describe una clase de transformaciones de un estado individual, físicamente diferenciables, debemos saber qué son estas transformaciones y cómo es que se producen físicamente. Quiero mostrar en este trabajo que, aun cuando se hallan en la literatura ciertas derivaciones que sugieren, o dicen proporcionar, las bases necesarias para una interpretación de la regla de Luders como descripción de transformaciones de un estado individual, dichas afirmaciones no llegan a ser precisas. Al parecer, parten en su esencia de una confusión entre dos problemas diferentes de justificación: el problema de justificar la regla de Luders como principio estadístico, y el de justificarla como descripción de las transformaciones de una medición individual.

2. *Modificación de Luders a la fórmula de Von Neumann*

La medición preparatoria de la magnitud R, con un valor-propio

$\{r_k\}$ y una descomposición espectral $R = \sum_k r_k P_k$, en lenguaje de colectividades, se representa por la siguiente colectividad:

(2.1) $Z' = \sum_k w_k Z_k$

en donde Z describe a la subcolectividad de aquellos sistemas físicos para los cuales se obtiene el valor-propio r_k.

En el caso de magnitudes máximas, la fórmula (2.1) proporcionaría una descripción completa del cambio de estado tras una medición de R. Sin embargo, en el caso de magnitudes no-máximas, la fórmula (2.1) resulta ambigua, ya que, para un valor-propio degenerado [*degenerate*], no existe un único vector-propio sino una infinidad de vectores-propios que satisfacen (2.1). Von Neumann (en 1955) sugería que, en este caso, el estado del sistema después de la medición fuera descrito como una mezcla de los estados-propios en el espacio-propio del resultado de la medición.

Luders presentó dos objeciones al análisis de Von Neumann de las mediciones no-máximas:

a) La medición de una magnitud altamente degenerada sólo permite hacer afirmaciones relativamente débiles sobre la colectividad en cuestión. El cambio de estado correspondiente tendría que ser, por lo tanto, proporcionalmente pequeño, pero es precisamente éste el caso para el cual la proposición de Von Neumann proporciona una colectividad muy compleja.
b) Cabría esperar que, al igual que en la fórmula (2.1) para el cálculo del resultado de la medición, también el cambio de estado dependiera solamente de Z y r_k (y R). Y especialmente que el cambio de estado por medición de R, con resultado r_k fuera tal que, siendo puro el estado inicial, también el estado final fuera puro.

Para poder ver el acierto de la primera objeción de Luders, consideremos el caso extremo de una medición del operador unitario (de identidad). En este caso, todos los vectores son estados-propios del valor-propio 1. La proposición de Von Neumann nos llevaría a asignar como estado final una mezcla en la cual, a todos los vectores les fuera asignado el mismo peso. Pero resulta obvio que, en este caso, no se esperaría que hubiera cambio alguno en el estado inicial del sistema.

Luders no intentó obtener explícitamente una derivación de su regla. En lugar de ello, afirmó que, aplicando su regla de proyección generalizada (regla de Luders), la conmutatividad de los operadores que representan a ciertas observables es equivalente a la compatibilidad de dichas observables. A la demostración de esta equivalencia le llamaremos *teorema de la compatibilidad.* Von Neumann trató de demostrar el teorema de compatibilidad y conmutatividad (ver Von

Neumann (1955)) utilizando una cuestionable definición de compatibilidad de las observables para la cual era necesario aceptar una suposición dudosa (ver sección 6, más adelante). Luders, por el contrario, dio una definición de compatibilidad totalmente abstracta, en función de colectividades [*ensembles*] y selección de subcolectividades [*subensembles*]. Con base en esto pudo demostrar el teorema de la compatibilidad dentro del marco puramente estadístico de la teoría. Antes de evaluar la importancia del teorema de Luders, empezaré por esbozar su análisis de la compatibilidad.

2.2 *Definición* (de Luders): En una colectividad, se mide una magnitud R y se selecciona la subcolectividad que corresponde a un valor de medición r particular. Inmediatamente después (de tal suerte que se pueda hacer caso omiso del cambio debido a la evolución dinámica), se mide la magnitud S de esta subcolectividad y se selecciona la subcolectividad que corresponde al valor medido. Se dice que las mediciones de R y S son *mutuamente compatibles* si una medición subsecuente de R (en la segunda colectividad) da el resultado r con certeza.

2.3 *Definición* (de Luders): Dos mediciones de R y S son *mutuamente compatibles* si al intercalar la medición de R (entre dos mediciones de S), sin selección de una subcolectividad, no se altera el resultado de la medición de S.

Las anteriores definiciones caracterizan los conceptos de compatibilidad para magnitudes, con y sin selección de subcolectividades (Luders (1951), p. 323). *Dos magnitudes R y S son mutuamente compatibles (o no-interferentes) si existen mediciones de R y S mutuamente compatibles.* Obsérvese que estas definiciones de compatibilidad se aplican, antes que nada, a mediciones (preparatorias) definidas estadísticamente. Pero en tanto que la primera definición se formula en un lenguaje puramente estadístico de colectividades y selección de subcolectividades, la formulación de la segunda es más neutra y se presta (contrariamente a la primera), al menos en principio, para definir la compatibilidad en una interpretación de estado individual. Llamaré "compatibilidad-L" a la definición que hace Luders de la relación de compatibilidad. Cuando se requiera una referencia precisa a una de las dos definiciones de compatibilidad, haré la distinción entre "compatibilidad-L_1" y "compatibilidad-L_2".

Basándose en las dos objeciones antes presentadas, Luders sostenía que la regla de Von Neumann debía ser remplazada por las siguientes fórmulas:

1. Si se mide la magnitud R de una colectividad inicialmente en estado Z, y se obtiene el resultado r, entonces, después de la

medición, el estado de la subcolectividad correspondiente, representado por P, será:

(2.4) $Z' = P_k Z P_k$

2. Al repetir la medición, el estado de la colectividad (original) en su totalidad, será:

(2.5) $Z' = \sum_k P_k Z P_k$

Es fácil comprobar que Z' satisface los requisitos matemáticos deseados.

De aquí se desprende el teorema principal de Luders:

2.6 *Teorema* (de Luders): Si, después de la medición (sin selección) de una colectividad en un estado Z, se obtiene el estado final por la regla de Luders (fórmula (2.5.)), entonces las observables R y S serán (L_2)-compatibles si y sólo si los operadores que representan a R y S conmutan.

La demostración de este teorema se puede hallar en Luders (1951).

El teorema de Luders representa el núcleo de su justificación de la fórmula que éste propone. Su teorema muestra que, aceptando que su fórmula describe el estado posterior a la medición, se puede precisar el significado físico de la relación de compatibilidad, en función de la existencia de mediciones no-interferentes (interpretadas estadísticamente). Al problema de justificar el motivo por el cual se ha escogido la regla de Luders entre todas aquellas posibles reglas que seleccionan un estado puro después de la medición de un estado puro, el teorema de Luders ofrece una sólida justificación. No es difícil comprobar que tomando cualquier otra regla de proyección que no sea la de Luders, la compatibilidad-L no será equivalente a la conmutatividad. Existe la posibilidad de que una modificación artificial de la relación de compatibilidad permitiera una prueba del teorema de Luders pero, incluso esta rebuscada posibilidad es tomada en cuenta por una derivación de la regla de Luders que será vista posteriormente. *El problema de justificación antes referido, el problema para el cual el teorema de Luders proporciona una respuesta convincente, es el de encontrar "la regla" que seleccione los datos estadísticos "correctos" para la repetida medición de una magnitud (después de una medición no máxima).* Una justificación adicional y más elaborada se obtendrá de diversas derivaciones que veremos más adelante. Se mostrará que la regla de Luders se desprende de cierto principio básico de "cambio mínimo" o "no-interferencia". *Este problema, sin embargo, se debe distinguir del problema de interpretar la regla de Luders como descripción del proceso de medición individual.*

Es posible que no exista ningún proceso físico subyacente que pueda ser interpretado como instancia de una medición individual, lo cual pondría en una posición muy desventajosa a aquellos que creen en una interpretación de estado individual. Cuando menos, debería ser posible considerar la regla de Luders como una descripción de procesos individuales. En otro lugar (en 1987) argüí que, una vez que se abandona un presupuesto importante de las interpretaciones de estado individual (aquella que dice que un estado individual se representa por el conjunto de propiedades a las cuales cierto vector de estado asigna probabilidad uno), es posible dar una interpretación clara y precisa de la regla de Luders. Pero el primer paso consiste en separar los diferentes problemas.

Se pueden distinguir dos tipos de derivaciones. Por una parte, aquellas que incluyen total y cabalmente la estructura del espacio de Hilbert dentro de ese presupuesto —sea éste el que fuere— que es considerado necesario para una derivación de la regla de Luders que conlleve la interpretación semántica deseada. Por otra parte, se puede hablar de aquellas derivaciones que no incluyen la estructura del espacio de Hilbert como un todo dentro de sus premisas, y que tratan de obtener una derivación de la regla a partir de principios individualmente motivados.

La motivación para esta distinción es la siguiente: dado que la estructura del espacio de Hilbert proporciona una formulación incontrovertible de la estructura estadística de una teoría, resulta sencillo dar una interpretación puramente estadística de la regla de Luders, con base en derivaciones en las cuales, desde un principio, se acepta dicha estructura. Tales interpretaciones estadísticas no requieren que se dé el supuesto de que la regla de Luders describa un proceso de medición individual. Así pues, si se desea justificar una interpretación de estado individual, no es posible aceptar indiscriminadamente la estructura del espacio de Hilbert como una totalidad. Para justificar las interpretaciones de estado individual de la regla de Luders es preciso, según parece, utilizar principios que se puedan justificar como principios fundamentales que describen la conducta de sistemas individuales. Es decir, una interpretación de estado individual de la regla de Luders requiere una derivación a partir de principios que sean semánticamente relevantes para los estados y procesos de sistemas individuales.

Debe subrayarse que la diferenciación antes mencionada, entre interpretación estadística e interpretación de estado individual se refiere a la interpretación física de la regla de Luders. El punto en cuestión es justificar el contenido físico que se atribuye a la regla, cualquiera que ésta sea, mediante la justificación de la interpretación semántica de los principios de los cuales se deriva. Dado que, por lo general, no se hacen estas distinciones, las afirmaciones con respecto a los diferentes problemas de la justificación, por regla general, se confunden.

3. *Derivaciones de la regla de Luders*

La pregunta con respecto a si es posible derivar la regla de Luders en mecánica cuántica es muy antigua, y con frecuencia se piensa que constituye el núcleo del debate en torno al postulado de proyección. Frecuentemente se dan esbozos o sugerencias de derivaciones putativas, pero faltan los detalles (y a menudo no sólo los detalles) de las mismas. Con más frecuencia, la regla de Luders sólo se plantea como una "idealización conveniente". Jauch (en 1968), por ejemplo, sugiere el uso de la regla al observar que, para proyecciones P con rango unidimensional y un estado (representado por el operador) Z, $PZP = (TrZP)P$. Así pues, después de una medición preparatoria, el estado que describe al sistema se obtiene por $Z' = \sum_k P_k Z P_k$, para cualquier proyección unidimensional P_k, en donde $R = \sum_k r_k P_k$ es la descomposición espectral de una magnitud R, con valores-propios r_k. Ahora bien, Jauch dice:

> Resulta, pues, conveniente introducir el concepto de medición ideal que sólo afecta mínimamente al estado, y para el cual el estado después de la medición sigue siendo dado por la fórmula $[Z' = \sum_k P_k Z P_k]$, pero sin el requisito de que los operadores de proyección sean unidimensionales.

Esta sugerencia no resulta muy convincente para tan controversial principio. Sin embargo, la observación de Jauch parece proponer una derivación, si observamos que hace explícita una analogía formal entre la descripción que ofrece la regla de Luders y la descripción de las mediciones preparatorias. De dicha analogía saca provecho, por ejemplo, la derivación de Herbut que veremos más adelante (sección 3.7).

Podemos distinguir dos tipos de derivaciones dependiendo de la descripción implícita que éstas ofrecen del proceso de medición. El primer tipo de derivaciones se formula en lenguaje de operadores estadísticos y selección de subcolectividades. El segundo tipo de derivaciones utiliza, para describir la medición, el lenguaje de valores-propios o "valores definidos", en lugar del de selección de subcolectividades. No existe, por supuesto, una diferencia tajante entre lo que llamamos derivaciones "estadísticas" y "de valor definido". Una derivación puede utilizar un lenguaje en el que se mezclen operadores estadísticos y "valores definidos". Pero, como veremos, es preferible trazar la distinción para hacer una clasificación preliminar de las derivaciones disponibles. Las derivaciones de valor definido hacen pensar en el tipo de interpretación de la regla de Luders que, de justificarse, nos proporcionarían (al menos en principio) una derivación de estado individual de dicha regla. A continuación presento varias derivaciones de la regla de Luders, destacando los presupuestos que cada una de ellas incluye.

Al parecer, Luders compartía con Von Neumann la idea de que lo que él ofrecía era un principio básico sobre la medición, necesario como postulado indispensable para la interpretación de la teoría. Parecía conforme con que su principio se formulara dentro del marco estadístico de la teoría, y con la justificación de su propuesta a partir de las consecuencias derivadas de ella con relación a la interpretación de la estructura matemática de los espacios de Hilbert. Pero es fácil comprobar que los resultados formales de Luders que se presentan (en 1951) pueden ser utilizados (como lo muestra el siguiente teorema) para generar una derivación de la regla de proyección, en el marco de la teoría de los espacios de Hilbert, bajo un postulado muy plausible acerca de la compatibilidad.

3.4 *Teorema* (inverso de Luders): Para mediciones preparatorias, si se admite que siempre que conmuten dos operadores, las magnitudes correspondientes serán L-compatibles, entonces la regla de Luders describe el cambio de estado debido a una medición.

La demostración del teorema utiliza el siguiente sencillo resultado de la teoría de operadores:

3.5 *Lema*: Sean P y Q dos operadores que conmutan. Supóngase $P = \sum_n P_n$, entonces $Q = \sum_n P_n Q P_n$.

De aquí se desprende la demostración del inverso de Luders:

Supóngase que P y Q son dos magnitudes que conmutan, y que el estado inicial es Z, entonces, después de la medición de P:

$$Tr Z'Q = Tr\, ZQ$$

ya que P y Q son L-compatibles.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} Tr\, ZQ &= Tr Z(\sum_n P_n Q P_n) \quad \text{por el lema 3.5} \\ &= Tr\, Q(\sum_n P_n Z P_n) \quad \text{por propiedades de traza} \end{aligned}$$

así pues,

$$Tr Z'Q = Tr(\sum_n P_n Z P_n) Q$$

dado que Q es arbitraria (ver Von Neumann (1955), p. 188),

$$Z' = (\sum_n P_n Z P_n) \qquad Q.E.D.$$

Esta última demostración se halla implícita en Furry (1965).

De manera similar a Luders, Herbut (1969) sostenía que, si se considera la medición de una magnitud no-máxima R en la forma en que Von Neumann lo hace, es decir, como la medición implícita de una magnitud máxima M, se hará, generalmente, una sobre-medición de R, en el sentido de que al medir M se obtendrán, por lo general, subcolectividades más finas que las que se esperaría obtener de una medición R. Herbut afirmaba que lo que se necesita es desarrollar la idea de la "medición mínima de una observable". Para cualesquiera operadores R y S que pertenezcan al espacio de Hilbert operador, existe un concepto único de distancia definido por:

(3.6) $d(R,S) = \|R - S\| = (R - S, R - S)^{\frac{1}{2}}$

Herbut utilizó esta métrica para expresar en una forma matemática precisa la idea de la medición (preparatoria) mínima de una observable R: la medición mínima de una observable R debe transformar un estado cuántico arbitrario Z en un estado Z' que, en esta métrica, se halle tan cerca de Z como sea posible. Es éste el contenido del primer teorema de Herbut.

3.7 *Primer teorema de Herbut*: En las mediciones preparatorias, si el cambio de estado debido a una medición es mínimo en la métrica del espacio de Hilbert operador (como se definió anteriormente, p. 144), entonces Z' se obtiene por la regla de Luders, esto es $Z' = \sum_n P_n Z P_n$.

Para la demostración, ver Herbut (1969).[1]

En (1974) Herbut presenta una derivación de la regla de Luders diferente. De acuerdo con Herbut, se puede decir que la regla de Luders describe mediciones de mínima perturbación mediante el concepto (de Dirac) de "observable completa". Dada una observable no-máxima R, se puede formar una secuencia de observables compatibles R, S,..., para obtener un conjunto completo. La medición de esta secuencia de observables genera una secuencia correspondiente de valores-propios (valores definidos) r, s,..., que permite llegar a

[1] Quizá sería conveniente subrayar que una versión abstracta del resultado de Herbut se desprende directamente del hecho, bien conocido, de que la regla de Luders es una versión de la expectativa condicional en los espacios de Hilbert, y que ésta es el mejor medio para calcular la condicional del estado final a partir (de la información) del resultado de la medición.

un estado puro; para esta acumulación de valores definidos es indispensable que "cada medición conserve los antes obtenidos por el sistema, en el curso de las mediciones anteriores de las observables compatibles" (Herbut (1974), p. 196). Así pues, afirma, debemos imponer el siguiente requisito a las mediciones preparatorias:

Requisito H: Si un sistema físico en estado Z tiene el valor definido d de una observable D, y si esta observable es compatible con la observable medida R, entonces, sea cual fuere el resultado r obtenido de la observable medida R, los sistemas N que hayan producido este resultado deben encontrarse en un estado Z en el que se conserva el valor definido d de D.

Con este requisito Herbut demuestra el siguiente teorema:

3.8 *Segundo teorema de Herbut*

A. Si la medición preparatoria de una observable R (con descomposición espectral $R = \sum_n r_n P_n$) satisface el requisito H, entonces, un estado arbitrario Z cambiará al estado Z' que se obtiene por la regla de Luders.
B. Si $TrZP_n \geq 0$ supone la regla de Luders para el cambio de estado debido a una medición, entonces el requisito H es válido.

Obsérvese que el requisito H logra una formulación más precisa si se admite la conmutatividad (no así la compatibilidad) de las observables correspondientes. Esto, en particular, deja ver claramente que el teorema B de Herbut es una reformulación de la regla de Luders con valores definidos. Como hace notar Herbut, su derivación de la regla de Luders representa una mejora a la formulación del propio Luders, dado que la clase de las observables que tienen un valor definido d en el estado inicial y que son compatibles con R, es una subclase muy restringida de la clase de las observables compatibles con R. Pero para nosotros es aún más importante que *el teorema de Herbut proporciona un medio para extender la definición de compatibilidad de Luders (y su fórmula para el cambio de estado debido a una medición) a los (estados de los) sistemas individuales.* Podemos considerar al requisito H como una reformulación de la relación de compatibilidad que puede ser aplicada a sistemas individuales, dado que es posible considerar que los valores definidos pertenecen a cada sistema de la colectividad (correspondientes al valor dado). La siguiente definición de compatibilidad para magnitudes de sistemas individuales está, pues, implícita en el enfoque de Herbut: dos magnitudes son compatibles si por medición se conservan los valores definidos. En lugar de pasar a la demostración del teorema de

Herbut, veremos una derivación simplificada de la regla de Luders que Stairs (1982) presenta. A diferencia de Herbut, quien formuló su resultado en un lenguaje mezcla de estados estadísticos y valores definidos, Stairs ofrece una derivación utilizando la definición de compatibilidad implícita en el enfoque de Herbut, con una formulación de la mecánica cuántica que se encuentra totalmente dentro del marco de las interpretaciones de estado individual. La derivación de Stairs es un paradigma de lo que yo llamo derivaciones "de valor definido".

Derivación de Stairs de la regla de Luders: Stairs define la compatibilidad de las magnitudes en función de mediciones no-interferentes. Dos magnitudes son compatibles si existen mediciones no-interferentes de ellas. En términos experimentales idealizados, esto significa que si Q_1 y Q_2 son dos magnitudes compatibles, existen entonces mediciones de Q_1 y Q_2, tales que:

(i) si éstas se realizan simultáneamente, el sistema queda en un estado-propio común $Q_1 - Q_2$;
(ii) si éstas se realizan en secuencia $(Q_1, Q_2, Q_1, \ldots)$, los valores medidos son estables.

Stairs define, entonces, las mediciones ideales como aquellas que son no-interferentes para magnitudes compatibles. Demuestra que, si se admite la posibilidad de que se efectúen secuencias de mediciones en un solo sistema, y se está de acuerdo en que las mediciones ideales de magnitudes compatibles deben ser no-interferentes, entonces se puede derivar la regla de Luders.

Siguiendo a Stairs, procederemos a derivar la regla de Luders a partir de un ejemplo. Utilizaré aquí la reformulación "escueta" de Teller (en 1983). Supóngase que nuestro sistema está representado por un espacio tridimensional H de Hilbert. Un estado del sistema será entonces una combinación lineal de una base arbitraria para H, digamos $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Considérense las magnitudes (representadas por) $A = a_1 P_{\alpha_1} + a_2 P_{\alpha_2} + a_3 P_{\alpha_3}$, $B = b_1 P_{\alpha_1} + b_2(P_{\alpha_2} + P_{\alpha_3})$. Si el estado inicial del sistema es ϕ y, al medir B, obtenemos el resultado b_2, el estado resultante deberá ser un vector-propio en el plano $\alpha_2 - \alpha_3$ Ahora, considérese una magnitud D con dos valores-propios d_1 y d_2, tales que el espacio-propio correspondiente a d_1 es el plano $P_{b_2} - \alpha_1$, y el espacio-propio correspondiente a d_2 es el plano ortogonal. Mídase la magnitud D, compatible con B, y supóngase que el resultado es d_1. El estado, después de la medición, se hallará en el plano $\alpha_2 - \alpha_3$. Pero, bajo el supuesto de que se respetan los valores (definidos) compatibles, éste deberá también hallarse en el plano $P_{b_2}\phi - \alpha_1$. Así pues, el estado final debe encontrarse en la intersección de ambos planos, la cual no es sino P_{b_2}.

Una derivación lógico-cuántica. En el marco de la lógica cuántica, la regla de Luders puede derivarse a través de la relación de equivalencia generada por el condicional de Sasaki. Supóngase que el estado inicial es a y se mide la magnitud no-máxima M, obteniendo el resultado (representado por la proposición) r. Por lo general, habrá una infinidad de posibles transformaciones de estado que describan esta medición. Destaca, sin embargo, la transformación de estado descrita por la regla de Luders, por el hecho de que, dado que a es el estado inicial, entonces r y el estado seleccionado por la regla de Luders, $L(a, r)$, son equivalentes bajo la siguiente relación de equivalencia:

$$\text{(E) } x \sim y \text{ si y sólo si } (x \circledS\!\!\supset y) \wedge (y \circledS\!\!\supset x) = 1$$

en donde $\circledS\!\!\supset$ representa el condicional de Sasaki: $x \circledS\!\!\supset y = x^{\perp} \vee (x \wedge y)$.

Para mayores detalles y exposición de esta derivación, véase Friedman y Putnam (1978), Hellman (1981) y Stairs (1982). Friedman y Putnam sostenían que la relación de equivalencia (E) es una relación de equivalencia lógica ya transformada a la lógica cuántica (generada por el bicondicional lógico-cuántico) que permite la derivación del postulado de proyección (en "lógica cuántica real"), sin postulados adicionales.

4. *Presupuestos que contienen las derivaciones*

A primera vista no resulta claro cuáles son los presupuestos referentes a la relación de compatibilidad que requieren tanto el segundo teorema de Herbut como la derivación de Stairs. Si se considera la manera en que éstos describen la relación de compatibilidad, se podría pensar que el hecho de que dos magnitudes sean compatibles *implica* que existen valores definidos que deben ser conservados durante el proceso de medición. Pero aceptar en este punto una definición tan fuerte de la compatibilidad sería erróneo. Recuérdese que el teorema de Luders sólo muestra la equivalencia entre la compatibilidad-L (aquella que define Luders) y la conmutatividad de los operadores correspondientes, bajo la aceptación de la fórmula de Luders para el cambio de estado.

Sin embargo, es fácil comprobar que para el requisito H de Herbut solamente se necesita que la conmutatividad sea condición suficiente para la compatibilidad. Para observar esto, basta con remplazar, en el requisito H, la supuesta compatibilidad de R y D, por su conmutatividad, y suponer que la conmutatividad es condición suficiente para la compatibilidad. De manera similar, obsérvese que la primera condición que plantea Stairs como definición de la compatibilidad (condición (i)), realmente no es necesaria en su derivación; nuevamente, lo único que se requiere es que la conmutatividad sea condición suficiente para la mensurabilidad simultánea (lo cual se identifica implícitamente con la compatibilidad física). La derivación de Stairs es, pues, una versión del teorema inverso de Luders, en la cual (al igual que en la segunda derivación de Herbut), se define la compatibilidad en función de la conservación de valores definidos.

El teorema inverso de Luders, al igual que el de Stairs y que el segundo teorema de Herbut, sólo requieren presuponer que la conmutatividad es condición suficiente para la compatibilidad. En tanto afirmación que se refiere a una relación de compatibilidad, esto tendría que ser indiscutible. No sería muy lógico pensar en la posibilidad de conmutar magnitudes que no sean compatibles. Pero la interpretación física de la regla de Luders como transformación de estado que respeta los valores definidos, afirma implícitamente mucho más de lo que las derivaciones pueden garantizar.

Obsérvese que en el teorema inverso de Luders, cuando se habla del cambio de estado debido a la medición, se hace referencia a una medición que es "no-interferente". Si consideramos la regla de Luders como un algoritmo que genera el estado estadístico posterior a la medición, la "no-interferencia" resulta claramente interpretada en función de la conservación de probabilidades relativas o valores definidos (ver la exposición de esto más adelante). Pero, cuando el teorema inverso de Luders es interpretado con referencia a procesos individuales, no queda siquiera claro, para empezar, qué es lo que se entiende por medición "no-interferente". Admitiendo que la compatibilidad de las magnitudes implica la conmutatividad de las correspondientes observables, tendríamos, al menos en principio, un concepto claro de lo que es la no-interferencia. Pues, en este caso, el "respetar la compatibilidad" podría significar, ni más ni menos, lo que establece el requisito de Herbut, a saber, que los valores definidos sean conservados (como mostró Von Neumann (en 1955), las magnitudes conmutativas tienen en común todos sus valores-propios). *Pero, si la relación física de compatibilidad es más fuerte que la relación de conmutatividad de las observables correspondientes, entonces la idea de "respetar la compatibilidad" necesitaría ser reformulada, dado que, en este caso, la conservación de los valores definidos no podría ser utilizada para describir completamente la conservación de una relación física de compatibilidad más fuerte que la de compatibilidad-T.* Es posible pensar en debilitar la idea de valor definido, de tal suerte que los valores definidos puedan también aparecer en el caso de magnitudes no-conmutativas, pero resulta muy difícil concebir cómo se podría implementar esta idea en el marco de las derivaciones tipo Luders.

Se podría pensar en utilizar la segunda derivación de Herbut para mejorar esta situación. En efecto, como hemos visto, la derivación de Herbut representa una mejora en el sentido de que requiere conservar menos información durante la medición. Pero, cuando se considera la regla de Luders como descripción de lo que sucede a nivel de los procesos individuales, surgen nuevamente preguntas muy similares acerca de la naturaleza de la no-interferencia. La segunda derivación de Herbut permite una lectura alternativa de la no-interferencia como descripción de una secuencia de observables y de una secuencia correspondiente de mediciones aproximativas a cero, en un estado puro. Este enfoque, según se ve, proporciona un medio para describir una forma plausible de llegar al estado seleccionado por la regla de Luders, mediante una serie de mediciones que satisfagan cierta condición de adecuación. Pero este tipo de análisis no puede dar una respuesta al porqué una medición única llega al estado descrito por la regla de Luders. Esta regla sólo describiría el límite de una serie (infinita) de transformaciones físicas, no así el resultado de una transformación única. Tampoco podría este análisis explicar cómo es que la regla de Luders logra obtener el estado final "correcto" para la re-medición.

Además, las derivaciones de valor definido deben enfrentar otro problema. Admitamos, para poder proseguir este razonamiento, que para cada par de magnitudes con compatibilidad-L, existe una transformación de estado individual que corresponde a la medición no-interferente de una de las magnitudes, tal como lo exige la definición 2.3. Para poder aceptar la interpretación que sugieren las derivaciones de valor definido, en tanto descripción de transformaciones del estado individual, sería necesario suponer que existe una transformación que es "simultáneamente" no-interferente, con respecto a todos los pares de magnitudes compatibles relevantes. Ésta es una suposición cuya justificación no resulta obvia, como tampoco parece ser, en sí misma, razonable. ¿Con base en qué se puede esperar que exista dicha transformación? ¿Qué podría hacernos pensar que, en efecto, pudiera existir una transformación "ideal" (no-interferente) en el sentido en el que la requieren estas derivaciones, interpretada en función de sistemas individuales? De acuerdo con las derivaciones del tipo Luders, no existe medición subyacente alguna de una magnitud máxima que todo lo abarque y que permita justificar tal idea. El que la compatibilidad física resultara ser una relación más fuerte que (aquella representada por) la conmutatividad de las magnitudes correspondientes, sólo volvería más apremiante este asunto. Debemos concluir entonces que a menos que se presuponga una interpretación lógico-cuántica realista, queda abierta la búsqueda de una interpretación de la regla de Luders en función de transformaciones del estado individual.

La derivación lógico-cuántica "realista" de Friedman y Putnam afirma que el concepto de medición ideal es puramente lógico. Sin embargo, como observa Hellman en (1981), no resulta claro cuál sería la forma en que fuera posible representar el razonamiento condicional en lógica cuántica, y el condicional de Sasaki sólo proporciona una de las muchas posibilidades que hay para lograrlo. La equivalencia (E) presupone que se postule que el condicional de Sasaki genera una relación privilegiada en lógica cuántica. Sin embargo, este postulado sólo puede ser justificado apelando a principios que se hallan más allá de la "lógica" de la estructura ortomodular. Baste aquí observar que esta derivación presupone la métrica del espacio de Hilbert y, en esa medida, la derivación resulta redundante, puesto que la regla de Luders puede ser claramente derivada bajo este supuesto sin necesidad de bagajes interpretativos adicionales (como lo muestra la primera derivación de Herbut).

Lo que Friedman y Putnam sostienen es que una interpretación lógico-cuántica nos permite derivar la regla de Luders, en tanto que la interpretación copenhaguense debe aceptarla como un principio *ad hoc*. Pero el problema de justificación de la regla de Luders al que ellos afirman referirse es el de tratar de responsabilizar a los procesos individuales por los datos estadísticos cuánticos, de tal forma que los datos estadísticos puedan ser sustentados, al menos en principio, en dichos procesos individuales. *La regla de Luders es simplemente presupuesta en el proceso, en la medida en que la lógica cuántica considera que la estructura estadística refleja directamente la estructura de los sistemas (eventos) individuales.* Esto se debe a que esta estructura estadística incluye la métrica del espacio de Hilbert y, en dicha métrica la perturbación es equivalente a la elección de la condicional de Sasaki (ver Hardegree (1976)). *La lógica cuántica no puede adjudicar ventaja alguna a la posibilidad de derivar la regla de Luders en lógica cuántica. Esta derivación no es sino una formulación en la teoría de retículos de un teorema matemático (el primer teorema de Herbut), que es accesible a cualquier interpretación.*

Si lo único que nos interesa son los datos estadísticos de los resultados de las mediciones, entonces la derivación de Herbut, junto con su interpretación estadística, nos proporciona una justificación sólida a la regla de Luders. Éste es un punto importante y definitivamente solucionado. El problema que resta es cómo interpretar, si esto es posible, la regla de Luders en tanto descripción de un proceso que corresponda al cambio ocurrido en el estado de un sistema individual, y cómo justificar tal interpretación.

El teorema inverso de Luders propone una manera de hacerlo. Se puede considerar que el segundo teorema de Herbut y la derivación de Stairs son intentos por explicar esta idea, proporcionando derivaciones en función de la acumulación o conservación de "valores definidos". Pero lo que yo afirmo es que estos teoremas (en tanto derivaciones de estado individual) fallan en que, si bien la interpretación de la regla de Luders que estos intentan justificar se halla sugerida en la interpretación estadística, no parece haber un fundamento sólido, a nivel de los procesos individuales, que sustente tal interpretación. En particular, la interpretación habitual da por sentado algo que la derivación no garantiza, a saber, que la relación de compatibilidad que respeta la regla de Luders es (como la llamaré en la siguiente sección) la de compatibilidad-T. Como se demostrará en la segunda parte de este artículo, esta suposición no parece ser justificable. Una explicación natural de una relación de mensurabilidad simultánea nos lleva, en mecánica cuántica, a una relación de compatibilidad física que no es la relación de compatibilidad que presuponen las interpretaciones habituales.

Hemos visto que cada una de las distintas derivaciones de la regla de Luders requiere de supuestos diferentes. Las derivaciones que con mayor facilidad se explican, al admitir las interpretaciones estadísticas del estado mecánico-cuántico (paradigma de las cuales es el primer teorema de Herbut) son más simples y muestran que la interpretación de la métrica de los operadores ofrece una interpretación estadística de la regla de Luders. Por otra parte, las derivaciones de valor definido plantean (y, con frecuencia, se piensa que sustentan) la afirmación más contundente de que ellas proporcionan una derivación (interpretación) física de la regla de Luders, adoptando una interpretación de sistema individual del estado. Como he dicho, estas derivaciones no justifican tan contundente interpretación física de la regla de Luders. En la próxima sección hago un análisis formal de la relación de compatibilidad y del concepto de idealidad, tal como estos se hallan implícitos en las derivaciones antes presentadas. Esto nos proporcionará un "mapa" que podrá guiarnos a través del laberinto de las diferentes versiones de la regla de Luders, lo cual nos permitirá extraer conclusiones generales y hacer más precisa nuestra anterior exposición. Este análisis, así como la importancia que este puede tener en mi estudio de la regla de Luders, me fueron sugeridos por G. Hellman.

5. *Un análisis formal de la relación de compatibilidad*

Se supone que la regla de Luders "respeta" o "conserva" la relación de compatibilidad. Si se considera que esto define estadísticamente el contenido físico de la regla de Luders (lo que, al parecer, era la intención de Luders), no tendría por qué haber más discusiones. Las derivaciones antes vistas proporcionan bases firmes para sustentar dicho enfoque. Pero el enfoque habitual sostiene que la regla de Luders describe una clase privilegiada de transformaciones de estado que juega un papel fundamental en la interpretación de la teoría, y para justificar este enfoque no basta con considerar que la regla de Luders es una regla que describe transformaciones de estado que respetan la compatibilidad. La discutida relación de compatibilidad debe ser interpretada físicamente de forma tal que pueda justificarse el hecho de que la regla de Luders conserve esta relación.

Existen varias maneras alternativas para definir una relación de compatibilidad que satisfaga ciertos requisitos mínimos. Algunas de estas relaciones son (o pueden ser) físicamente relevantes para la formulación del espacio de Hilbert de la mecánica cuántica. Hardegree sostuvo (en 1978) la importancia de una relación de "compatibilidad parcial" que permitiera entender ciertos aspectos del proceso de medición. Esta última relación corresponde a lo que yo llamo compatibilidad-P (ver def. 5.1). En lo que aquí sigue, M_i son magnitudes, es decir, conjuntos ortonormales de vectores-propios. A los subespacios cerrados, generados por una magnitud M_i se les llamará también M_i.

5.1 *Definición*: $M_1 \underset{p}{\longleftrightarrow} M_2 \equiv_{\text{def}} M_1$ es P-compatible con M_2 si M_1 y M_2 tienen algunos vectores-propios en común.

5.2 *Definición*: $M_1 \underset{t}{\longleftrightarrow} M_2 \equiv_{\text{def}} M_1$ es T-compatible con M_2 si M_1 y M_2 tienen todos los vectores-propios en común.

5.3 *Teorema*:

i) $M_1 \underset{T}{\longleftrightarrow} M_2 \Longrightarrow M_1 \underset{p}{\longleftrightarrow} M_2$
ii) $M_1 \underset{p}{\longleftrightarrow} M_2 \not\Longrightarrow M_1 \underset{T}{\longleftrightarrow} M_2$

La transformación de una medición es una transformación $T(a_i, r) = a_f$ en donde a_i es (un vector-propio que representa) el estado inicial, r es el resultado de la medición de una magnitud M y a_f es un estado-propio del resultado de la medición. Decimos que *una medición conserva (respeta) una magnitud* X si para $x \epsilon X, x \epsilon [a_i)$ entonces $x \epsilon [a_f)$. Aquí $[x)$ es el filtro principal generado por el elemento (rayo) x (*i.e.*, $[x)$ es el conjunto $\{y; x \subseteq y$, en donde la relación $\subseteq$ representa la relación de inclusión entre los subespacios cerrados$\}$). Esta definición hace uso de la habitual ambigüedad entre los elementos de un espacio de Hilbert y los subespacios (rayos) unidimensionales generados.

5.4 *Definición*: Una medición de M en un sistema en estado a_i es P-ideal si conserva todas las X, tal que X es una magnitud P-compatible con M.

5.5 *Definición*: Una medición de M en un sistema en estado a_i es T-ideal si conserva todas las X, tal que X es una magnitud T-compatible con M.

La idealidad-P y la idealidad-T son casos especiales de una definición más (física y matemáticamente factible) general de la idealidad:

5.6 *Definición*: Una medición W-ideal es aquella que conserva todas las X, tal que X es una magnitud T-compatible con M y (que también conserva) un conjunto dado de magnitudes $\{X_i\} = W$, tal que $X_i \underset{p}{\longleftrightarrow} M$.

Una medición W-ideal es una medición T-ideal que, además, conserva *algunas* magnitudes parcialmente compatibles. Aun cuando a primera vista pueda parecer extraña la idea de una medición W-ideal (y la relación implícita de compatibilidad), no se puede ignorar esta versión de idealidad aprióricamente. Se pueden invocar motivos físicos para la selección del conjunto $\{X_i\}$. Se podría muy bien dar sentido a esta idea, haciendo la analogía con la existencia de reglas de superselección, dado que, al igual que en este caso, se podría sostener que existe un conjunto de magnitudes con estatuto privilegiado, en el sentido de que no sólo no requieren conservación-T por medición, sino tampoco conservación-P. Supóngase que M es una cantidad de este tipo; la idea sería que, si se mide la magnitud M, entonces una medición ideal conservará no sólo todas las magnitudes T-compatibles con M, sino que también conservará a M' si M' es P-compatible con M. Sin embargo, aquí admitiremos que, de acuerdo con nuestra exposición en la sección 4, cualquier concepto (físicamente aceptable) de medición ideal contiene la idealidad-T como caso especial.

El teorema de Von Neumann sugiere que el candidato paradigmático para el concepto de una medición físicamente ideal (ver (1955), capítulo III) es el siguiente: Dos magnitudes son simultáneamente mensurables si y sólo si sus operadores correspondientes conmutan.

5.7 *Definición*: Una medición de M con estado inicial a es S-ideal si conserva todas las X, tal que X es una magnitud simultáneamente mensurable con M.

5.8 *Teorema*: Para todo concepto-R de medición ideal, en donde R puede representar a P, T, W o S, M es R-ideal $\Longrightarrow$ M es T-ideal.

La demostración se desprende automáticamente de las anteriores definiciones y del hecho de que siempre que A y B sean T-compatibles, A y B serán simultáneamente mensurables. Obsérvese que este teorema sólo requiere de la "sencilla" dirección del teorema de Von Neumann.

5.9 *Esquema de definición*: R-Luders $\equiv_{\text{def}}$ $\forall S$, S es una transformación del estado por medición, S es R-ideal $\longrightarrow$ S obedece a la regla de Luders.

Lo siguiente se desprende, pues, automáticamente:

5.10 *Teorema*: T-Luders $\Longrightarrow$ R-Luders para $R = P$, W o S.

Este teorema ofrece un enunciado más preciso, en función de mediciones ideales, de la parte medular de las derivaciones de valor definido antes formuladas.

Ahora puedo especificar algunas de las críticas que antes expuse con respecto a las interpretaciones habituales. La regla de Luders describe mediciones ideales, independientemente de la interpretación física del concepto de medición ideal, siempre y cuando una medición ideal satisfaga el requisito mínimo de que se conserven las magnitudes T-compatibles. Pero si no es con base en la regla de Luders, ¿cómo se selecciona, entonces, una relación de compatibilidad físicamente privilegiada que se supone será conservada por las transformaciones de mediciones individuales? Más aún, ¿cómo podemos justificar esta selección de una relación de compatibilidad sin caer en un mero planteamiento *ad hoc* de la existencia de dicha relación y del hecho de que las mediciones ideales (de primer tipo) la respetan, en oposición a cualquier otra relación posible? Como hemos visto, los argumentos habituales en favor de la identificación de dicha relación, expresados en función de la perturbación mínima de los "valores definidos" están muy lejos de ser concluyentes. Más aún, la interpretación habitual parece estar comprometida con la cuestionable afirmación de que la relación que debe ser respetada es la de compatibilidad-T. Dado que, si la relación a respetar es más fuerte que la de compatibilidad-T, entonces la idea de definir la regla de Luders en función de la conservación de los valores definidos, pierde su atractivo intuitivo. A continuación examino la posibilidad de corregir el enfoque habitual, sosteniendo que, en efecto, es posible señalar la relación física de compatibilidad-T como la relación física de compatibilidad fundamental que la regla de Luders debe respetar, si se identifica la compatibilidad-T con *la* relación física de medición simultánea en mecánica cuántica.

6. *La mensurabilidad simultánea y la regla de Luders*

Si pudiéramos interpretar la compatibilidad-T como una relación física fundamental *para sistemas individuales*, entonces, en principio, tendríamos una forma de comprender el significado físico de la regla de Luders. El teorema de Von Neumann de la mensurabilidad simultánea (en (1955), cap. III) presenta lo que generalmente se toma como el fundamento del enfoque según el cual se debe identificar a la compatibilidad-T con la mensurabilidad simultánea. En este teorema, Von Neumann demostró la equivalencia entre un concepto implícito de mensurabilidad simultánea para observables, y la conmutatividad de las observables correspondientes. Si la demostración de Von Neumann pudiera ser aceptada con respecto a los estados individuales, aparentemente tendríamos, entonces, un medio, al menos en principio, para comprender el contenido físico de la regla de Luders, en función de las transformaciones del estado individual que respetan la relación física fundamental de mensurabilidad simultánea. Veremos, sin embargo, que la demostración de Von Neumann de su teorema descansa en una suposición sumamente cuestionable, que sólo puede ser justificada si, desde un principio, se acepta la estructura del espacio de Hilbert. La demostración alternativa de T. Jordan al teorema de Von Neumann aparentemente supera las críticas hechas a la demostración de Von Neumann, pero se verá que su demostración es arbitrariamente restrictiva. Al eliminar esta arbitrariedad se llega a una teoría de mediciones conjuntas para observables no-compatibles, con un sentido tal que afecta directamente la definición habitual de la regla de Luders.

Para demostrar su teorema de la compatibilidad, Von Neumann sostuvo que, dadas dos magnitudes (cantidades) físicas A y B, se puede construir una nueva magnitud física $A + B$, con base en la adicionalidad de los valores-propios de las observables correspondientes. La nueva magnitud física $A + B$ corresponde a un operador con valores-propios $a + b$. Esto presupone lo que podría llamarse "el postulado de la adicionalidad". Este postulado afirma que la suma de los resultados de la medición proporciona las bases para definir una magnitud compuesta $A + B$ que debe representar al proceso físico de la medición simultánea. Una vez aceptado este postulado, el problema físico de definir la mensurabilidad simultánea se transforma fácilmente en un problema dentro de la teoría de los espacios de Hilbert, y la demostración del teorema se desprende como una derivación más bien simple de los axiomas de Von Neumann.

Bell sostuvo, en el contexto de un debate acerca de las teorías de las variables ocultas (ver, asimismo, Bell (1982)), que si dos operadores S_x, S_y (con valores-propios s_x y s_y) no conmutan, entonces la observable correspondiente a la suma, representada por el operador $S_x + S_y$, *no tiene por qué necesariamente poseer los valores-propios* s_x+s_y. En (1982), Bell presentó el siguiente ejemplo: Para partículas spin-$\frac{1}{2}$. Sean P y Q componentes del momento angular del spin, en direcciones perpendiculares $P = S_x, Q = S_y$, y sea O el componente en una dirección intermedia, $O = (P + Q)/\sqrt{2}$. Los valores-propios de O, P, Q son, todos ellos, magnitud $\frac{1}{2}$, en tanto que el postulado de Von Neumann requeriría que fueran $(\pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2})\sqrt{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Así, tenemos que concluir que Von Neumann comete petición de principio al dar por sentado su postulado de adicionalidad, dado que sólo aquellos operadores representados por los operadores conmutativos deben satisfacer sus axiomas —no así los otros. Así, Von Neumann no llega a establecer la interpretación de la relación física de compatibilidad tal como lo requeriría la interpretación habitual de la regla de Luders.

T. Jordan, en (1969), aborda de manera diferente el concepto de mensurabilidad simultánea. Partiendo de una definición simple de la mensurabilidad simultánea, este enfoque parece subsanar los problemas presentes en el teorema de Von Neumann. *Jordan plantea la siguiente condición explícita necesaria para la mensurabilidad simultánea (conjunta)*: Supóngase que A y B representan cantidades simultáneamente mensurables con precisión ilimitada. Entonces, para cualesquiera x, y, números reales, las mediciones pueden determinar si los valores de las cantidades representadas por A y B son:

$$\begin{array}{ccc} \leq x & \text{y} & \leq y \\ \leq x & \text{y} & > y \\ > x & \text{y} & \leq y \\ > x & \text{y} & > y \end{array}$$

Jordan construye una cantidad mensurable real con los valores 1, 2, 3, 4, que corresponden a estas cuatro posibilidades mutuamente excluyentes.

Esta cantidad es representada por el operador:

$$I_1 + 2I_2 + 3I_3 + 4I_4$$

en donde I_1, I_2, I_3, I_4 son operadores de proyección ortogonal, tales que:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 1$$

Ahora, él procede a demostrar el siguiente teorema.

6.1 *Teorema*: Cantidades (reales) que sean simultáneamente mensurables con precisión ilimitada, serán representadas por operadores hermicianos A, B, tales que $[A, B] = 0$.

La demostración se puede hallar en Jordan (1969), p. 87. Es una demostración directa dentro del marco de los espacios de Hilbert. Al parecer, Jordan ofrece una demostración del teorema de Von Neumann que evita las dificultades que encontramos en la demostración original de Von Neumann. Pero el asunto no termina ahí.[2]

Partiendo del análisis presentado por Muynck *et al.* en (1979), mostraré que la afirmación de Jordan de que las magnitudes pueden ser medidas con precisión ilimitada, es arbitrariamente restrictiva, y que el eliminarla nos lleva a la posibilidad de formular esquemas de mediciones conjuntas para mediciones no-compatibles con un sentido tal que se debilita la identificación de la compatibilidad-T con la mensurabilidad simultánea, en el sentido fuerte que lo requieren las interpretaciones habituales de la regla de Luders.

Supongamos que un sistema S es descrito por una función de estado que interactúa con dos aparatos de medición (para las observables) A y B. Simbolicemos el procedimiento de medición por $T_{A,B}$. Las magnitudes son representadas por los operadores hermicianos A y B, con valores-propios y vectores-propios que se obtienen por:

$$\begin{aligned} A_{\alpha_m} &= a_m \alpha_m \\ B_{\beta_n} &= b_n \beta_n \end{aligned}$$

De acuerdo con el análisis habitual (de Von Neumann) de la evolución del sistema combinado durante la medición, se supone que la evolución del sistema S más los aparatos A y B se efectúa de acuerdo al esquema:

$$\text{(M1)} \quad \psi_i = \psi \otimes \chi_0 \otimes \xi_0 \xrightarrow{T_{A,B}} \psi_f = \Sigma_{l,m,n} S_{lmn}(\psi, T_{A,B}) \phi_l \otimes \Theta_m \otimes \eta_n$$

[2] El lector podría preguntarse si acaso la teoría de Park y Margenau sobre la medición simultánea es importante para el punto que aquí se discute. Pero baste con hacer notar que, independientemente de cualquier otra consideración, el concepto de Park y Margenau sobre la medición simultánea, aun en el caso de que estuviéramos dispuestos a admitir ciertos presupuestos cuestionables de su enfoque, sería irrelevante para el asunto referente a la interpretación física de la regla de Luders en tanto descripción de transformaciones del estado individual. El concepto de Park y Margenau sobre la mensurabilidad simultánea, tal como se halla implícito en los ejemplos del método de tiempo de vuelo, es, en el mejor de los casos, aproximado para cualquier tiempo finito t.

en el cual $\{\phi_l\}$ es cierto conjunto ortonormal completo del espacio H de Hilbert que representa a S. χ_0 y ξ_0 son los estados iniciales de los medidores A y B, respectivamente. $S_{lmn}(\psi, T_{A,B})$ son coeficientes que dependen del estado inicial ψ_i del sistema objeto y, posiblemente, del procedimiento de medición $T_{A,B}$.

La distribución de probabilidad conjunta $W(a_m, b_n; \psi; T_{A,B})$ para A y B puede entonces definirse como el valor de expectativa de los operadores de proyección $P_m \otimes Q_n = \mid \Theta_m >< Q_m \mid \eta_n >< \eta_n >$ en el estado final ψ_f, dando así:

(M2) $W(a_m, b_n; \psi; T_{A,B}) = \Sigma_l \mid S_{lmn}(\psi, T_{A,B}) \mid^2$

$\Sigma_{m,n} W(a_m, b_n; \psi; T_{A,B}) = 1$

Con el fin de obtener una definición física satisfactoria de la medición conjunta, Muynck *et al.* pretenden imponer restricciones al esquema $T_{A,B}$. Una restricción obvia es que la transformación $T_{A,B}$, siendo un proceso mecánico-cuántico, debe ser lineal. ¿Qué otras restricciones se pueden imponer al esquema? Muynck *et al.* examinan la siguiente: en el estado final, el aparato de medición relevante debe señalar, con certeza, la posición correspondiente, si s se halla inicialmente en un estado descrito por una función-propia de A y B. Esto implica el requisito de que la medición-A no sea perturbada por la medición-B (y viceversa). Omitiendo en la anotación la dependencia sobre T, este requisito se expresa en los coeficientes, por las relaciones:

(M3) $S_{lmn}(\alpha_r) = \delta_{mr}(S_{lrn}(\alpha_r); S_{lmn}(\beta_s) = \delta_{ns}(S_{lms}(\beta_s))$

o, en forma equivalente,

(M3′) $S_{lmn}(\psi) =< \alpha_m \mid \psi > S_{lmn}(\alpha_m) =< \beta_n \mid \psi S_{lmn}(\beta_n) >$

Park y Margenau (1973) mostraron que un esquema que obedece a este requisito es inconsistente si A y B no conmutan. Ellos concluyeron que un esquema (M1) para mediciones conjuntas no es adecuado para expresar la medición conjunta de observables con operadores no-conmutativos. Sin embargo, como muestran Muynck *et al.*, no se debe culpar de ello al esquema (M1) sino al requisito (M3).

De (M2) y (M3) se desprende que:

(M4a) $W(a_m, b_n, \psi) = \mid< \alpha_m, \psi >\mid^2 W(a_m, b_n; \alpha_m)$
(M4b) $\qquad\qquad\qquad = \mid< \beta_n \mid \psi >\mid^2 W(a_m, b_n; \beta_n)$

lo cual lleva a las distribuciones marginales:

(M5) $\Sigma_n W(a_m, b_n; \psi) = \mid< \alpha_m \mid \psi >\mid^2$

$\Sigma_m W(a_m, b_n; \psi) = |< \beta_n \mid \psi >|^2$

obteniendo, así, de (M4) y (M5):

(M6) $W(a_m, b_n, \alpha_m) = W(a_m, b_n; \beta_n) = |< \alpha_m \mid \beta_n >|^2$

La distribución de probabilidad conjunta $W(a_m, b_n; \psi)$ es, pues, totalmente determinada por (M4) y (M6) *siempre y cuando* (M4a) y (M4b) sean iguales. Como demostró Bub (Bub (1974), cap. 4), este requisito sólo puede ser satisfecho si $[A, B] = 0$, lo cual resuelve la presunta inconsistencia del esquema (M1). Queda, pues, claro que, si se pretende definir las distribuciones de probabilidad conjuntas, en mecánica cuántica, para magnitudes no-conmutativas, es necesario debilitar o (M1) o (M4). No es difícil comprobar que (M1), por sí misma, no impone ningún otro requisito al esquema mecánico-cuántico (fuera de la linealidad), para mediciones individuales. El culpable debe ser, entonces, (M4).

Ahora bien, supóngase que efectuamos una medición individual (preparatoria) ideal de A, y posteriormente medimos A y B conjuntamente, en los microsistemas de una subcolectividad obtenida de un estado puro dado después de la primera medición. Entonces, la parte derecha de (M4a) puede interpretarse como la distribución de probabilidad conjunta de A y B, que corresponde a este procedimiento en su totalidad. Sin embargo, (M4b) puede interpretarse en forma análoga, como la distribución de probabilidad conjunta de una medición conjunta de A y B, precedida de una medición individual (ideal) de B.

Si, como Muynck *et al.* sugieren, siempre que $[A, B] \neq 0$, las mediciones de A y B deben considerarse como procedimientos físicos totalmente diferentes, no habrá entonces motivos suficientes para esperar que de estos dos procedimientos diferentes se vaya a obtener el mismo resultado. Esto no proporciona una pista contundente para pensar que la igualdad de (4a) y (4b) implica la conmutatividad de A y B, y que un esquema de medición conjunta que contenga esta igualdad tiene una gran probabilidad de ser inconsistente con la medición conjunta de magnitudes no-conmutativas.

Muynck *et al.* continúan examinando otros requisitos más moderados que el (M4). No es importante para nosotros discutir y evaluar el esquema formal que proponen. *Lo que importa para nuestro problema es el darse cuenta de que se debe hacer una distinción (o, al menos, se puede hacer) entre una relación de no-perturbación y una relación de medición (conjunta) simultánea.*

Si aceptamos que las distribuciones de probabilidad conjuntas son funciones del estado estadístico por sí solo, como lo hacen tanto Park y Margenau, como Jordan (siguiendo a Von Neumann), es posible hacer una definición puramente matemática de la medición (conjunta) simultánea. Ello es así puesto que, *si las distribuciones conjuntas son funciones del estado por sí solo, entonces la situación experimental es irrelevante para la medición conjunta.* Ésta es la suposición clave que Muynck *et al.* hicieron explícita en su análisis de la mensurabilidad simultánea. Es la suposición que nos permite extender la precisión ilimitada del caso de la medición individual, a la medición conjunta. No es de sorprender que, entonces, como muestro a continuación, el requisito de Jordan de precisión ilimitada implique el requisito de Muynck de no-perturbación. Empezaré por formular explícitamente ambos requisitos.

Requisito D (de Muynck): En el estado final, el instrumento de medición relevante deberá señalar con certeza la posición correspondiente, si S se halla inicialmente en un estado descrito por una función-propia de A o B.

Requisito J (de Jordan): Si ϕ es un vector de longitud uno, para el cual $I_1\phi \neq 0$, entonces la probabilidad de que las cantidades representadas por A y B tengan valores $\geq x$ y $\geq y$ (para cualesquiera x, y, números reales) será $| I_1\phi |=| \phi |^2= 1$.

Ahora bien, si S es inicialmente descrito por una función-propia ψ de A o B, en una medición simultánea de A y B, entonces ψ (normalizada) es un vector que satisface la condición señalada en el requisito J, para el vector ϕ. Así pues, de acuerdo con este requisito, la probabilidad de que la cantidad A tenga un valor correspondiente a la función-propia ψ, es uno.

Así, una relación física de mensurabilidad simultánea que sea relevante para una interpretación de estado individual de la regla de Luders no puede ser identificada con la compatibilidad-T, o, al menos, como ha sido demostrado, esto no se puede hacer en el sentido fuerte que presuponen las interpretaciones habituales de la regla de Luders. La interpretación física de la regla de Luders como una regla que respeta la relación física de la mensurabilidad simultánea se puede basar en la derivación esbozada en la sección 5, pero el concepto de perturbación mínima (o idealidad) que contiene este argumento no se basa, independientemente, en un concepto físico de transformación (ideal) del estado individual. El significado físico de la idealidad-S (ver definición 5.7 y teorema 5.8) resulta estar limitada a una interpretación estadística de la métrica del espacio de Hilbert.

7. *Conclusión*

Sostenemos que se debe hacer una clara distinción entre dos problemas de justificación de la regla de Luders. La justificación de la regla en tanto regla puramente estadística, es directa. Se puede demostrar que la regla de Luders es el mejor medio para calcular el estado estadístico final condicionado al resultado de la medición. En ese sentido, la regla es un resultado meramente matemático del que puede disponer cualquier interpretación. El problema de justificación que resta es el de comprender el contenido físico de la regla de Luders, si acaso éste existe, como transformaciones del estado individual. El presente estudio descubrió un punto de tensión esencial que se halla presente en los fundamentos de las interpretaciones habituales de la regla de Luders. Ésta se puede derivar dentro del marco del espacio de Hilbert, si se admite que la conmutatividad implica la compatibilidad (teorema 5.10), pero la justificación de la interpretación semántica habitual de la regla parece requerir, igualmente, de la dirección inversa, es decir, que la compatibilidad implica la conmutatividad. En mi opinión, esta tensión es la causa de que las interpretaciones habituales fallen en su intento de comprender el contenido físico de la regla de Luders. He demostrado en este trabajo que sólo es posible considerar las derivaciones habituales como sugerencias para una posible interpretación en función de la idea de conservar o respetar una relación física de compatibilidad. La manera más natural de dar sentido a esta idea es considerando la regla de Luders como una transformación de estado que respeta los "valores definidos". Como lo demostró Herbut, esto basta para la derivación de la regla de Luders. Pero no podemos estar seguros de que los "valores definidos" posean algo más que un significado estadístico. Una sugerencia implícita habitual, para superar esta dificultad, es que se puede considerar que la regla de Luders conserva una relación fundamental de mensurabilidad simultánea que se puede identificar con la compatibilidad-T. Pero como he mostrado, existen buenos argumentos que apoyan la creencia de que, al menos en el sentido fuerte que requiere la interpretación habitual de la regla de Luders, la relación física de mensurabilidad simultánea es más fuerte que la compatibilidad-T. En este caso, la interpretación habitual de la regla en tanto transformación que conserva los valores definidos, es inadecuada.

No estoy sugiriendo que la regla de Luders no tenga contenido físico como descripción de las transformaciones de las mediciones individuales, lo que digo es que la idea que habitualmente se tiene de este contenido es, en el mejor de los casos, inconcluyente y/o no-informativa. En (1987) planteo otra aproximación al contenido físico de la regla de Luders, basada en un tipo de derivación completamente diferente.

El análisis anterior también señala otra seria dificultad que enfrenta la interpretación habitual de la regla de Luders. Este enfoque considera que la regla describe transformaciones que están sujetas a limitaciones dinámicas (vía la mensurabilidad simultánea, por ejemplo). En la literatura se hallan argumentos importantes que sugieren que estas limitantes son demasiado fuertes, que puede no existir transformación alguna que satisfaga las limitantes implícitas (ver, por ejemplo, el artículo de Stein y Shimony (1971)). Éste, que puede ser llamado el problema de la vacuidad, es un serio problema que enfrenta la interpretación habitual de la regla de Luders. Este problema de vacuidad sólo se agravaría si la relación física que debiera respetar la regla de Luders fuera una relación más débil que la de compatibilidad-T (ver teorema 5.10).

Podría pensarse que he omitido considerar una importante lectura alternativa del enfoque habitual; aquella que sostiene que la regla de Luders describe "una aproximación" que es "ideal", en el sentido de que, aun cuando ésta no describe transformaciones del estado individual, reales, existen secuencias de mediciones que se aproximan a la regla de Luders con precisión creciente. Pero, para que tal propuesta funcione, se debe presentar *un criterio físico significativo de la perturbación mínima para el caso de las transformaciones individuales*, y los argumentos que presenté en contra de la versión "literal" de la interpretación habitual, pueden dirigirse, *mutatis mutandis*, en contra del enfoque que dice que la regla de Luders sólo ofrece un criterio de aproximación. La sugerencia de que se tome la métrica (del espacio de Hilbert de los operadores) como medida de una aproximación para los sistemas individuales, no es sino eso, una sugerencia, y he demostrado que no existe una forma clara en que dichas sugerencias puedan llegar a convertirse en argumentos.

TRADUCCIÓN DE LORENA MURILLO S.

REFERENCIAS

Bell, J., (1982): "On the Impossible Wave Pilot", en *Foundations of Physics*, vol. 12, 1982.

Bub, J., (1974): *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Reidel, 1974.

Bub, J., (1979): "The Measurement Problem in Quantum Mechanics", en di Francia (ed.), 1979.

Broglie, L. de, (1948): "La statistique des cas purs en mecanique ondulatoire et L'interference des probabilities", en *La Revue Scientifique*, marzo de 1948.
Francia, di (ed.), (1979): *Problems in the Foundations of Physics*, Add. Wesley, 1979.
Friedman, M. y H. Putnam, (1978): "Quantum Logic, Conditional Probability and Interference", en *Dialectica* 32, pp. 3–4.
Furry, W. H., (1965): "Some Aspects of the Quantum Theory of Measurement", en *Theor. Physics Institute*, Universidad de Colorado, verano de 1965.
Hardegree, G., (1976): "The Conditional in Quantum Logic", en P. Suppes (ed.), *Logic and Probability in Quantum Mechanics*, Reidel, 1976.
Hardegree, G., (1978): "Compatibility and Relative Compatibility", en *Foundations of Physics*, 1978.
Hellman, G., (1981): "Quantum Logic and the Projection Postulate", en *Philosophy of Science*, 48, 3, 1981, pp. 469–486.
Herbut, F., (1969): *Annals of Physics*, 55, 1969, pp. 271–300.
Herbut, F., (1974): *Int. J. of Theor. Physics*, vol. II, 1974, pp. 193–204.
Jauch, J. M., (1968): *Foundations of Quantum Mechanics*, Add. Wesley, 1968.
Jordan, T., (1969): *Linear Operators for Quantum Mechanics*, T. Jordan (ed.), 1969.
Luders, G., (1951): "Über die Sustansänderung durch den Messprozess", en *Ann. d. Phys.* 8, 1951, pp. 322–328.
Martínez, S., (1987): "The Projection Postulate in the Conceptual Structure of Quantum Mechanics", Disertación, Universidad de Indiana, 1987.
Margenau, H. y J. L. Park, (1973): *Foundations of Physics*, vol. 3, 1, 1973, pp. 19–28.
Mielnik, B., (1968): "Geometry of Quantum States", en *Comm. Math. Phys.* 9, 1968, pp. 55–80.
Muynck, M., P. Janssen y A. Santman, (1979): *Foundations of Physics*, vol. 9, 1979, pp. 712–722.
Stein, H. y A. Shimony, (1971): "Limitations on Measurement", en B. d'Espagnat (ed.), *Foundations of Quantum Mechanics*, Nueva York, Academic Press, pp. 55–76.
Stairs, A., (1982): "Discussion: Quantum Logic and Luders' Rule", en *Philosophy of Science*, vol. 49, 3, 1982, pp. 422–436.
Teller, P., (1983): "The Projection Postulate as a Fortuitous Approximation", en *Philosophy of Science*, 50, 1983, pp. 413–431.
Von Neumann, J., (1955): *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (traducido por R. T. Beuer), Princeton, 1955.