

Geometría, topología e IA: Una perspectiva general



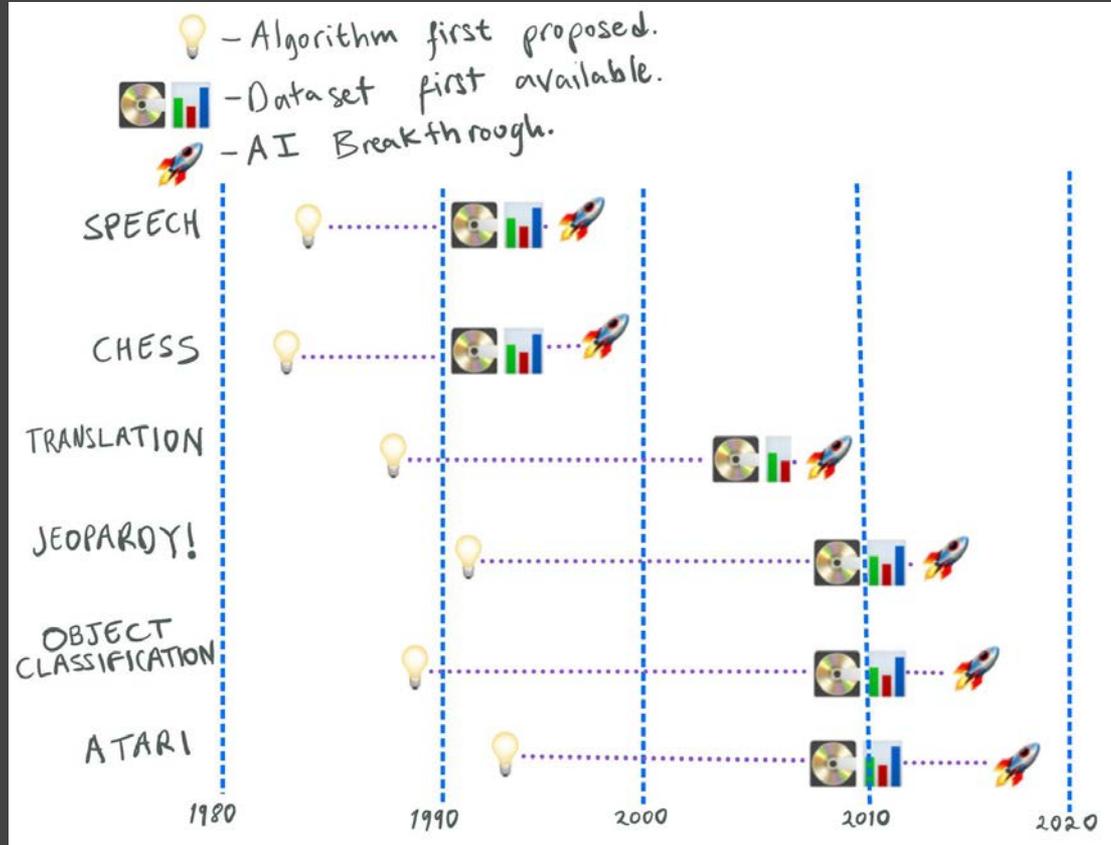
Pablo Suárez Serrato

Seminario de Inteligencia Artificial y Lógica

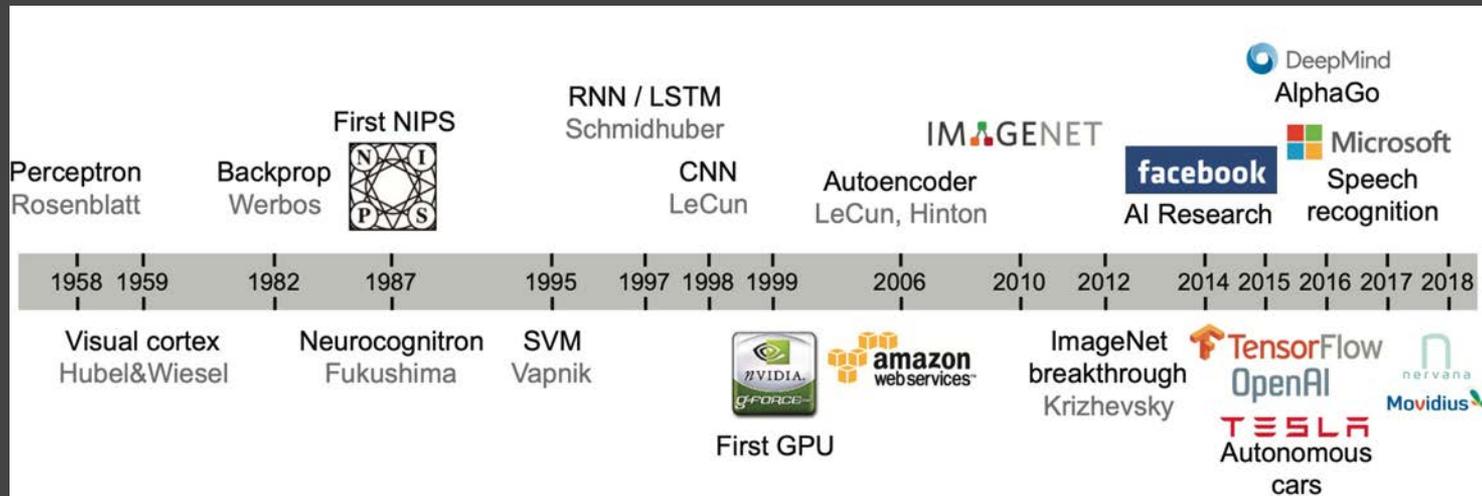
IIF UNAM, 2 de junio del 2025



Una breve historia de avances en IA

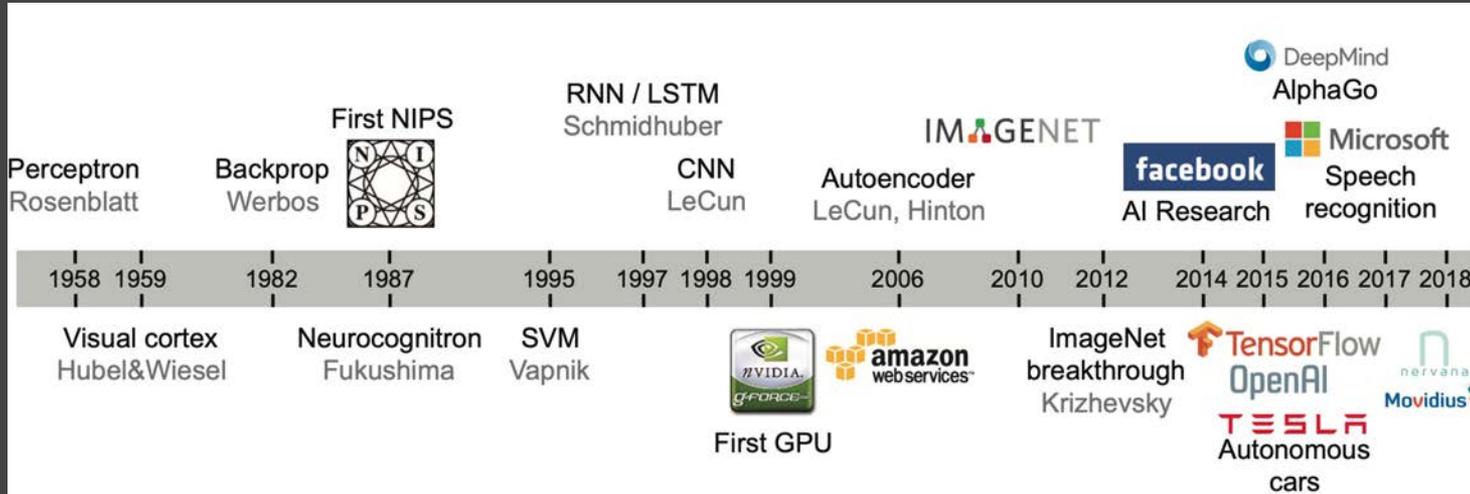


Una breve historia de avances en IA



Bronstein SIAM Tutorial 2018

Una breve historia de avances en IA



Bronstein SIAM Tutorial 2018

Influencia de la Geometría en IA

La geometría ha tenido una influencia fundamental y a menudo subestimada en el desarrollo de la inteligencia artificial (IA), proporcionando las bases matemáticas y conceptuales para muchos algoritmos y modelos.

1. Representación de Datos y Espacios de Características:

Vectores y Matrices: La geometría lineal (álgebra lineal) es el lenguaje fundamental de la IA. Los datos se representan como vectores en espacios vectoriales multidimensionales, y las operaciones sobre estos datos se realizan utilizando matrices.

Por ejemplo, una imagen es una matriz de valores de píxeles, y una palabra en procesamiento de lenguaje natural se representa como un vector (conocido como «*word embedding*»).

Espacios de Características: En el aprendizaje automático, los algoritmos trabajan en "espacios de características" donde cada dimensión representa un atributo o característica de los datos. La geometría nos permite comprender la distribución de los puntos de datos en estos espacios, calcular distancias entre ellos, y encontrar relaciones.

Influencia de la Geometría en IA

2. Algoritmos de Aprendizaje Automático «*Machine Learning*» Fundamentales:

Clasificación:

Máquinas de Soporte Vectorial (SVM):

Son un excelente ejemplo de cómo la geometría es clave. Las SVM buscan un "hiperplano óptimo" que separe las clases de datos en un espacio de características. Este hiperplano es una entidad geométrica (una línea en 2D, un plano en 3D, un hiperplano en dimensiones superiores) que maximiza el margen entre las clases.

K-Vecinos Cercanos (KNN):

Este algoritmo clasifica un nuevo punto de datos basándose en la mayoría de las clases de sus " k " vecinos más cercanos. La "cercanía" se define por una métrica de distancia, geométrica (como puede ser la distancia euclidiana, o en algunos casos en teoría de redes, la distancia hiperbólica).

Influencia de la Geometría en IA

2. Algoritmos de Aprendizaje Automático «*Machine Learning*» Fundamentales:

Cúmulos «*Clustering*»:

K-Promedios «*K-Means*»: Agrupa puntos de datos en cúmulos «*clusters*» basándose en su proximidad a "centroides" (puntos geométricos representativos de cada cúmulo). El algoritmo busca minimizar la suma de las distancias cuadradas entre los puntos y sus centroides asignados.

Reducción de Dimensionalidad:

Análisis de Componentes Principales (PCA): Utiliza conceptos geométricos como las transformaciones lineales y la proyección para reducir la dimensionalidad de los datos, encontrando las direcciones (componentes principales) donde los datos tienen mayor varianza.

Influencia de la Geometría en IA

3. Redes Neuronales y Aprendizaje Profundo:

Propagación de Señales: Las operaciones dentro de las redes neuronales, desde las multiplicaciones de matrices en las capas densas hasta las convoluciones en las redes convolucionales, son fundamentalmente operaciones geométricas que transforman los datos de un espacio a otro.

Espacios Latentes: Las redes neuronales profundas aprenden a mapear datos de entrada a "espacios latentes" de menor dimensionalidad. Estos espacios tienen una estructura geométrica compleja que la red aprende a manipular para realizar tareas como la generación de imágenes o la traducción de idiomas.

Influencia de la Geometría en IA

3. Redes Neuronales y Aprendizaje Profundo:

Geometría del Espacio de Pérdidas: La función de pérdida (o «*loss function*») en el deep learning define un paisaje multidimensional que el algoritmo de optimización (como el descenso de gradiente) navega para encontrar los pesos óptimos de la red. La geometría de este paisaje (su curvatura, sus mínimos locales y globales) influye directamente en la eficiencia y el éxito del entrenamiento.

Aprendizaje Geométrico Profundo «*Geometric Deep Learning*»: Es un campo emergente que extiende las técnicas tradicionales de deep learning a datos no euclidianos, como grafos, mallas 3D y variedades. Incorpora principios geométricos como la simetría y la invariancia en las arquitecturas de las redes neuronales, lo que permite a los modelos comprender y procesar datos inherentemente geométricos. Esto es crucial para aplicaciones en visión por computadora, robótica y modelado 3D.

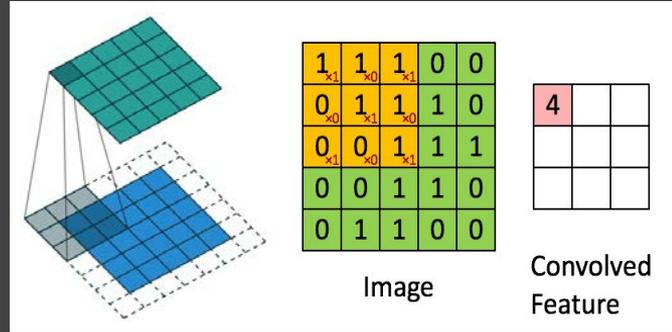
Influencia de la Geometría en IA

4. Visión por Computadora y Robótica:

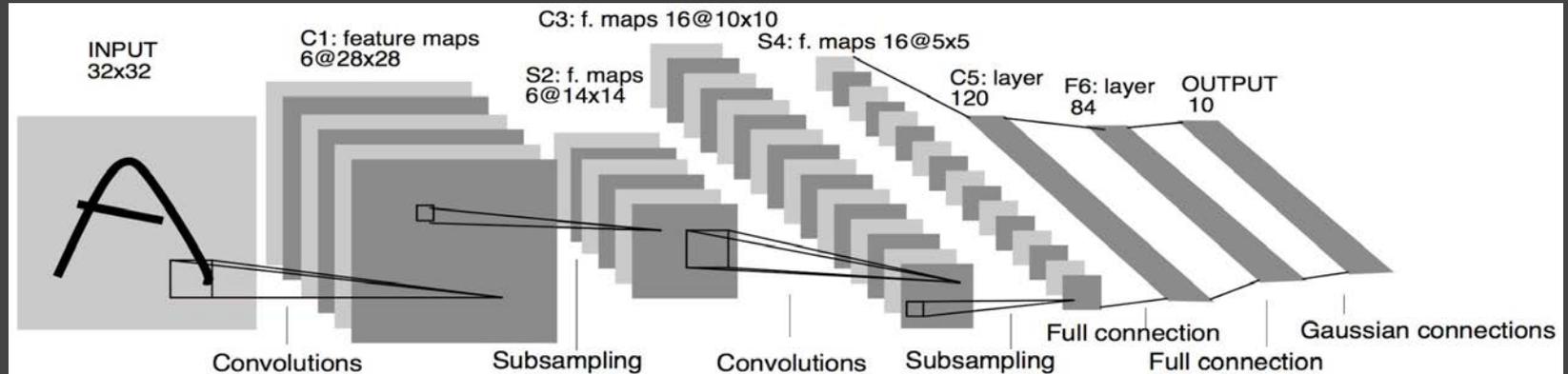
Comprensión de Imágenes: La geometría es indispensable para la visión por computadora. Los algoritmos utilizan conceptos geométricos para detectar bordes, formas, reconocer objetos, estimar poses 3D y reconstruir escenas a partir de imágenes 2D.

Navegación y Manipulación: En robótica, la geometría se utiliza para la localización, el mapeo, la planificación de trayectorias y la manipulación de objetos en el espacio físico. Los robots necesitan comprender la geometría de su entorno para interactuar con él de manera efectiva.

Redes Neuronales Convolucionales en 1998

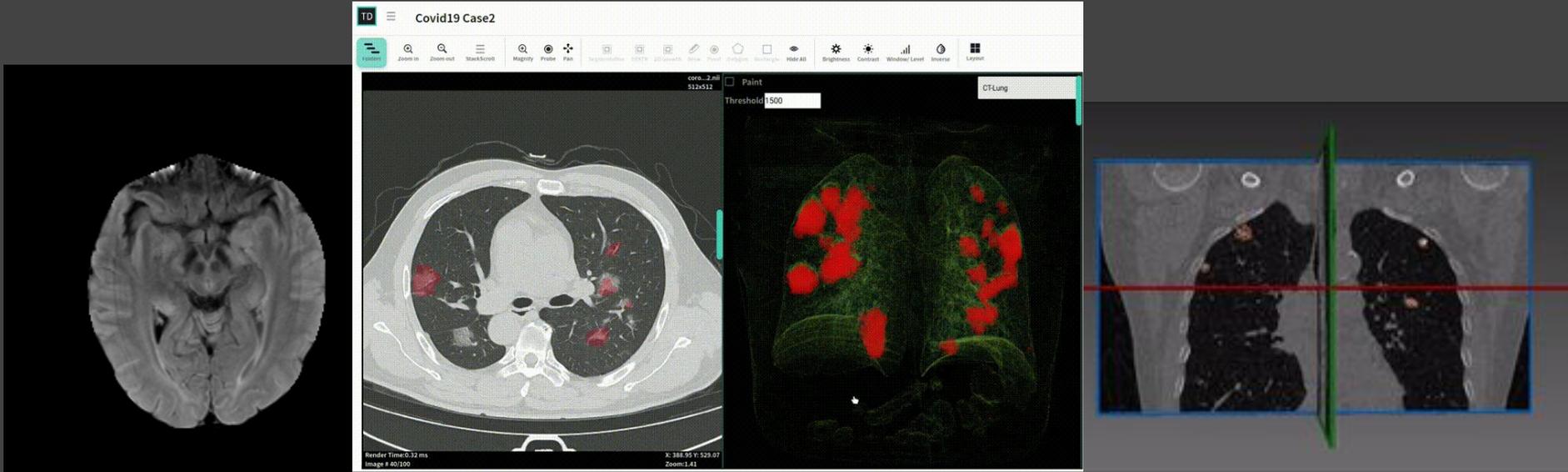


Vincent Dumoulin, Francesco Visin, MIT <<http://opensource.org/licenses/mit-license.php>>, via Wikimedia Commons



LeCun 1998

Redes Neuronales Profundas en 2020



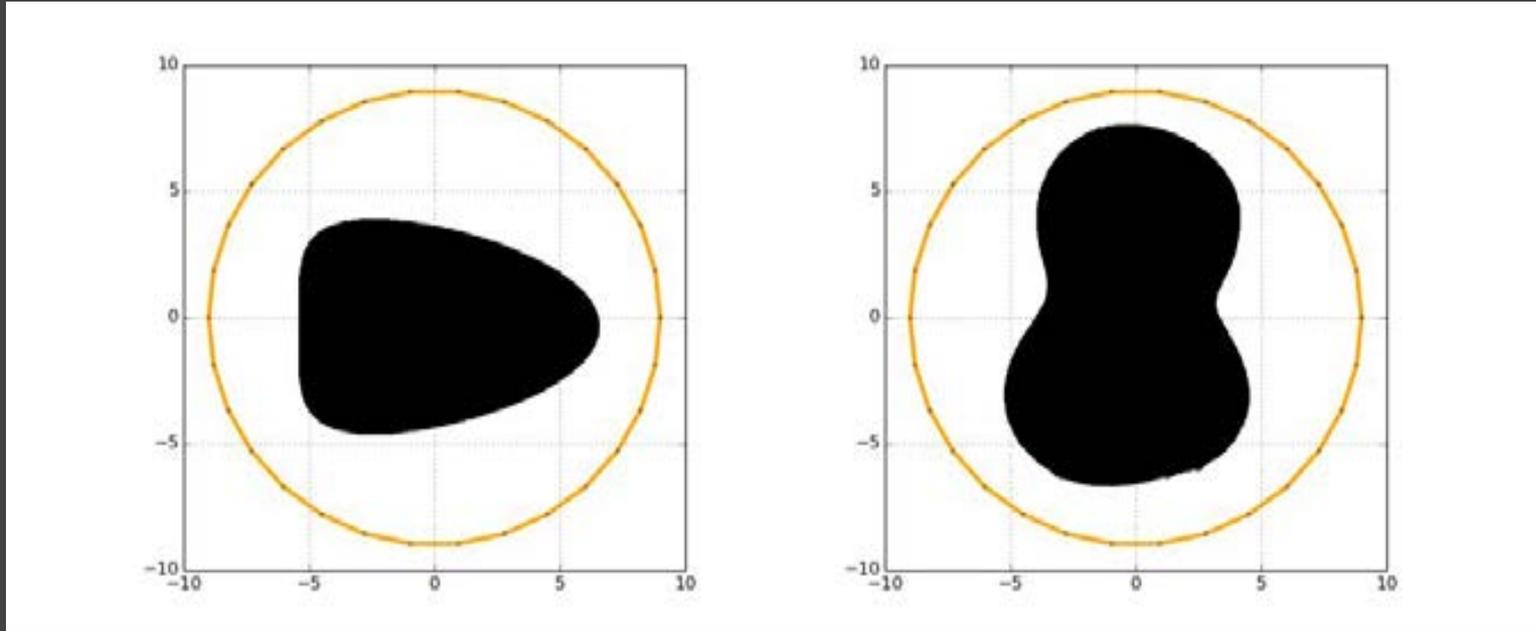
Online images from <https://nvidia.com>

NVIDIA Clara Holoscan, 2020

Análisis Geométrico Aplicado

Junto con Eduardo Velazquez Richards definimos un *flujo de curvatura media anisotrópico* y lo implementamos en paralelo.

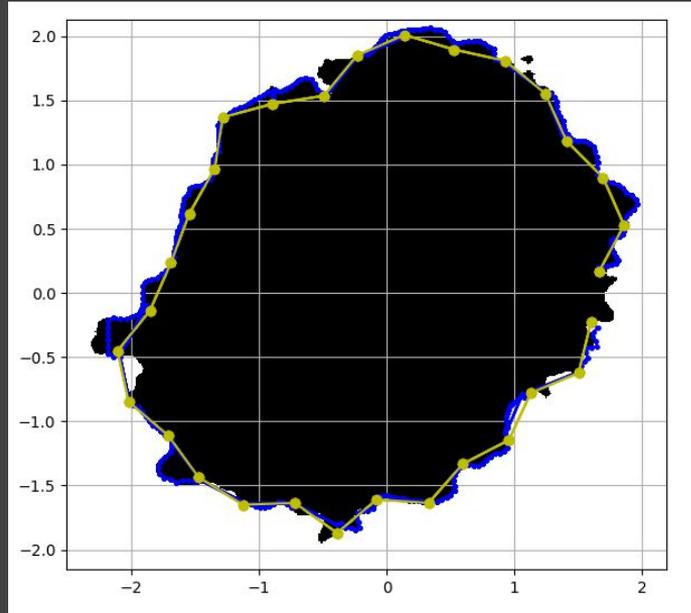
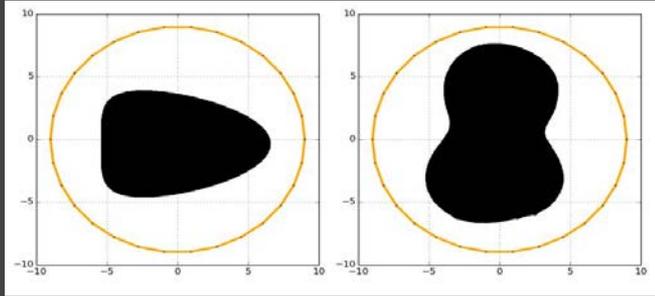
Nuestro flujo *encuentra* el contorno de una región, automáticamente aproximándolo.



[Contour parametrization via anisotropic mean curvature flows](#), Velázquez Richards, PSS, *Applied Mathematics and Computation*, (2023)

Análisis Geométrico Aplicado

Con estas técnicas se pueden desarrollar aplicaciones a la clasificación de lesiones de piel (melanoma) de acuerdo a la irregularidad del borde y que tanto deja de ser circular la región.



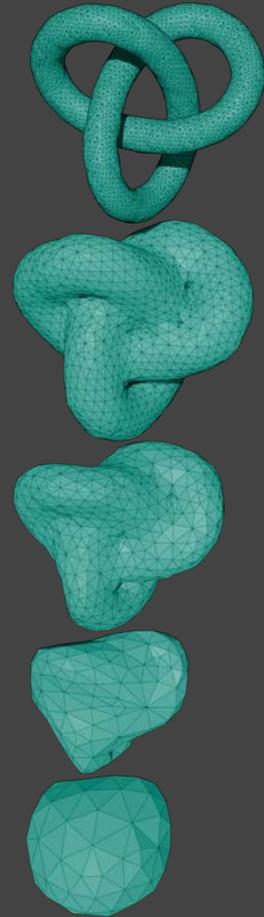
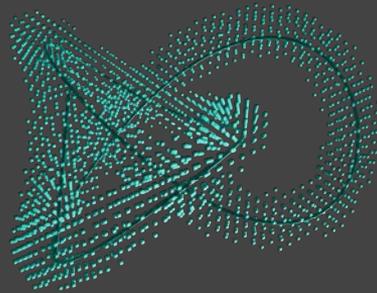
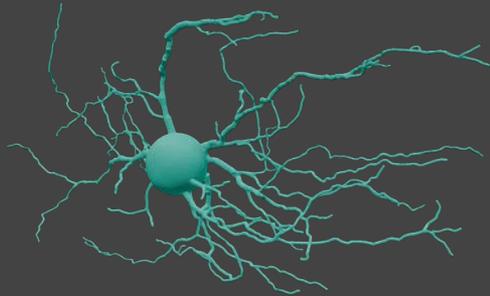
[Contour parametrization via anisotropic mean curvature flows](#), Velázquez Richards, PSS, *Applied Mathematics and Computation*, (2023)

Geometría Aplicada

La **Geometría Aplicada** incluye un rango de temas, cómo la Geometría Diferencial, Geometría Computacional y Cómputo Geométrico.

La **Geometría Computacional** lidia con algoritmos y estructuras de datos para realizar cálculos geométricos.

El **Cómputo Geométrico** cubre los métodos computacionales para resolver problemas de índole geométrica.

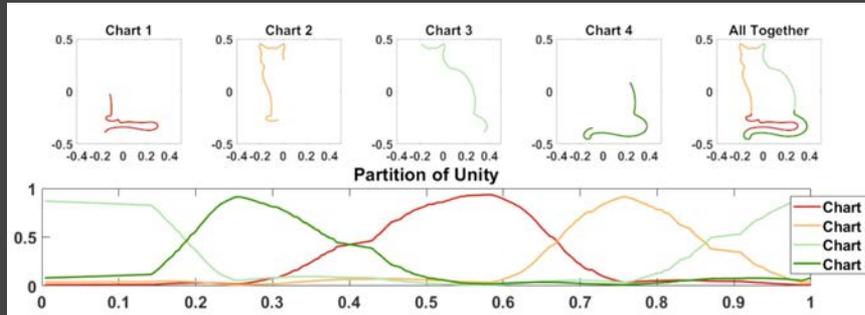
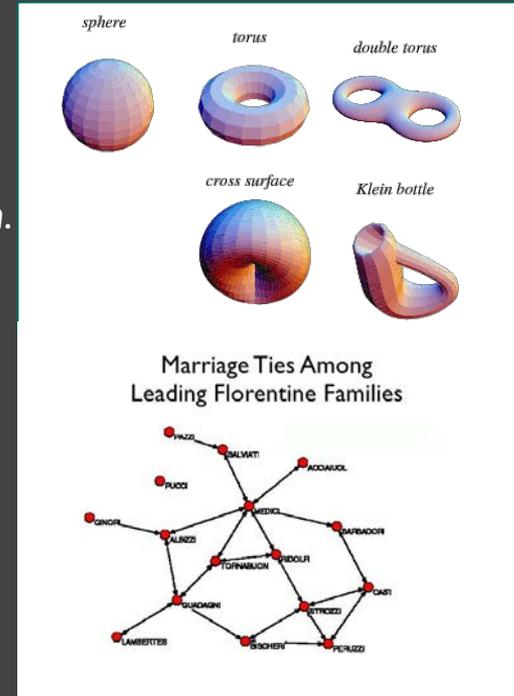


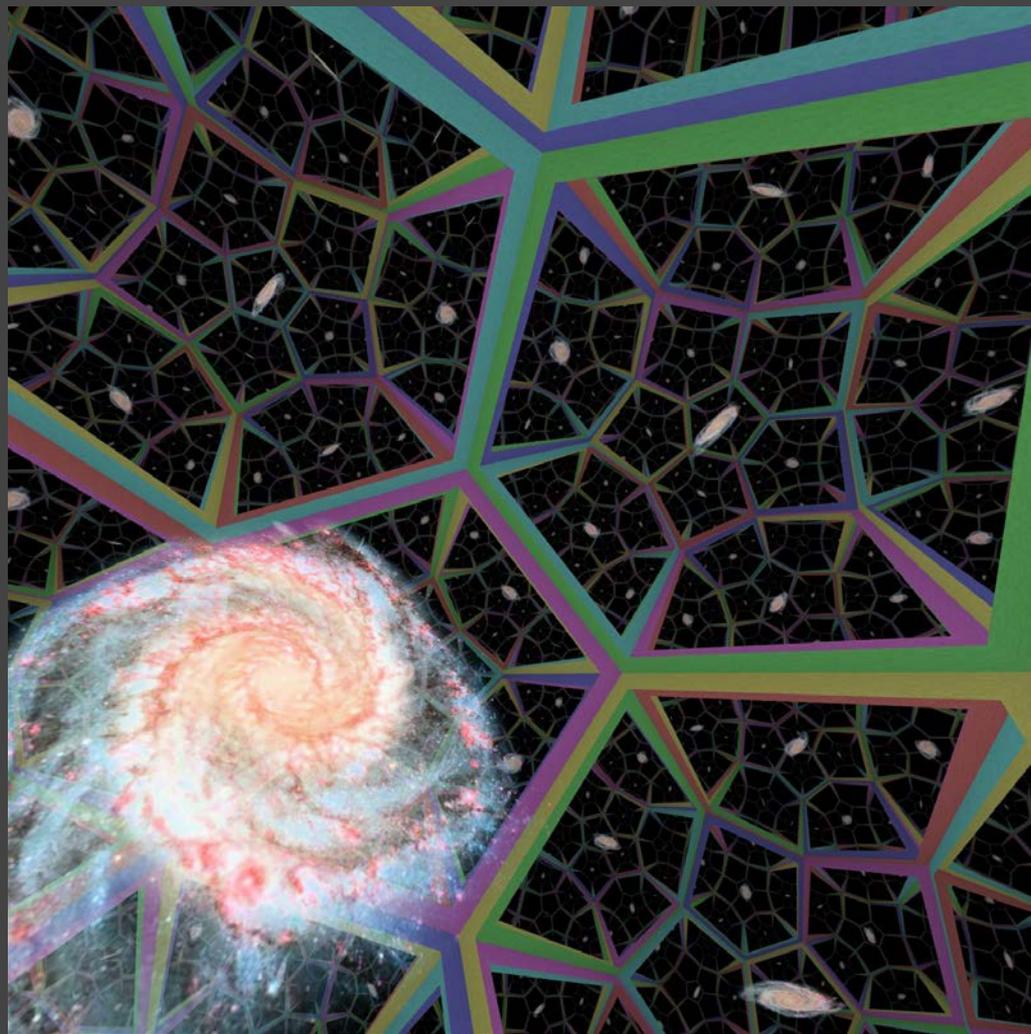
Aprendizaje Geométrico

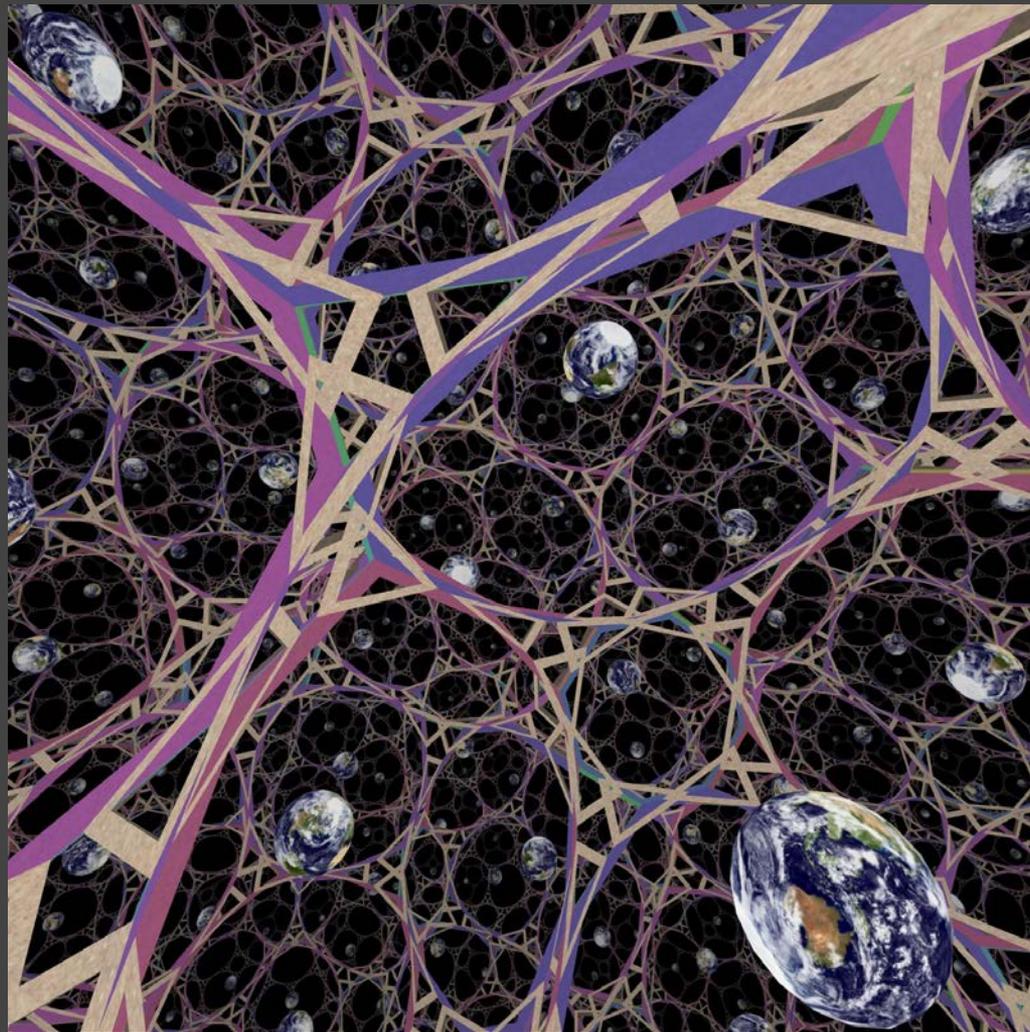
Variiedad: un espacio topológico en el que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un conjunto abierto de un espacio euclídeo de dimensión n .

Gráfica (Grafo): una estructura abstracta compuesta de vértices y aristas entre algunos de ellos, modela relaciones de parejas entre objetos.

Aprendizaje Geométrico = Aprendizaje en dominios donde la información geométrica importa
= Aprendizaje sobre **Variiedades y Gráficas**







La data hipotéticamente yace cerca de una variedad

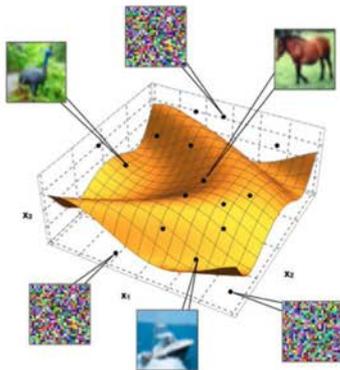
JOURNAL OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 29, Number 4, October 2016, Pages 983–1049
<http://dx.doi.org/10.1090/jams/852>
Article electronically published on February 9, 2016

TESTING THE MANIFOLD HYPOTHESIS

CHARLES FEFFERMAN, SANJOY MITTER, AND HARIHARAN NARAYANAN

PHYSICAL REVIEW X

Highlights Recent Subjects Accepted

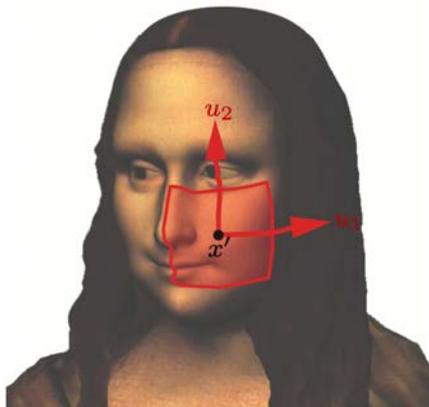
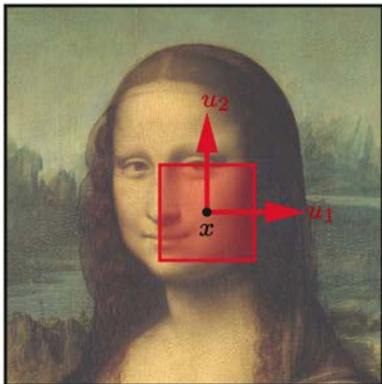


Modeling the Influence of Data Structure on Learning in Neural Networks: The Hidden Manifold Model

Sebastian Goldt, Marc Mézard, Florent Krzakala, and Lenka Zdeborová
Phys. Rev. X **10**, 041044 (2020)

A new model for analyzing structured datasets can provide insights into how data structure impacts machine learning in deep neural networks.

Aprendizaje en variedades



$$f = \sum_{k=1}^n \underbrace{\langle f, \phi_k \rangle_{L^2(\mathcal{X})}}_{\hat{f}_k} \phi_k$$
A diagram illustrating the decomposition of a function f into a sum of basis functions ϕ_k . On the left, a white 3D human figure in a yoga-like pose is labeled f . To its right, an equals sign is followed by a sum of four figures: \hat{f}_1 (red), \hat{f}_2 (blue), an ellipsis, and \hat{f}_n (multi-colored). Below each figure is a label: ϕ_1 , ϕ_2 , and ϕ_n .

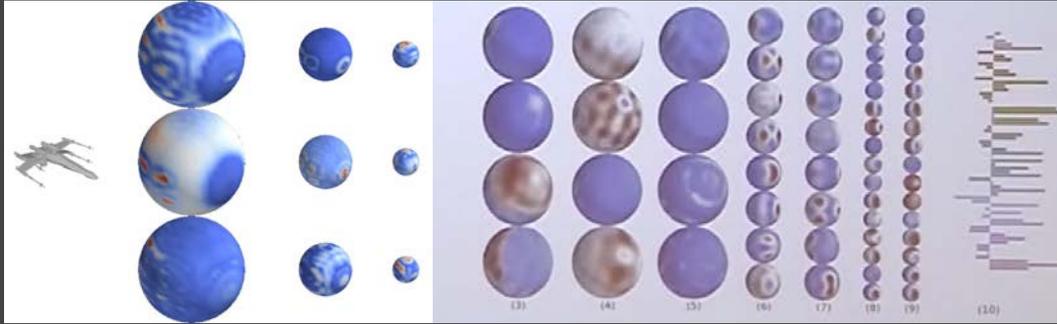
Bronstein SIAM Tutorial 2018

Ovsjanikov 2012

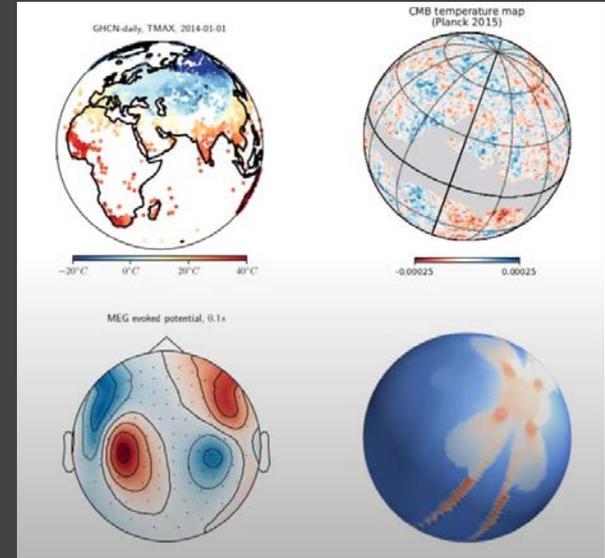
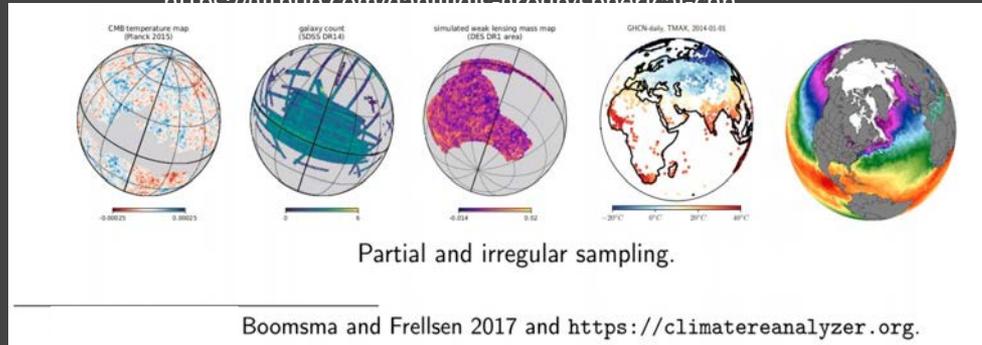
Las variedades típicamente
no tienen una estructura de
grupo o traslación

Aprendizaje profundo en variedades

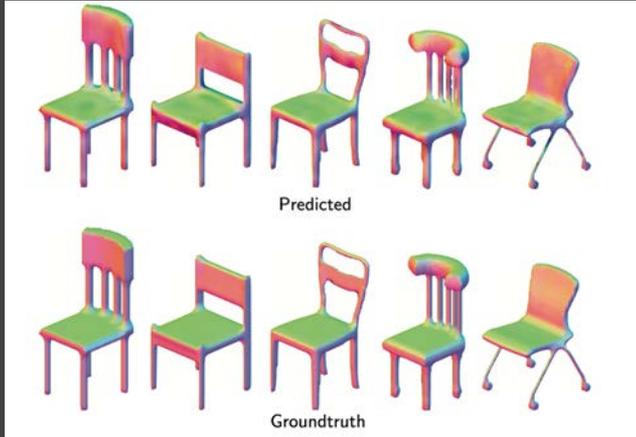
K. Daniilidis' Lab 2019



Online image from
<https://github.com/daniilidis-group/spherical-cnn>



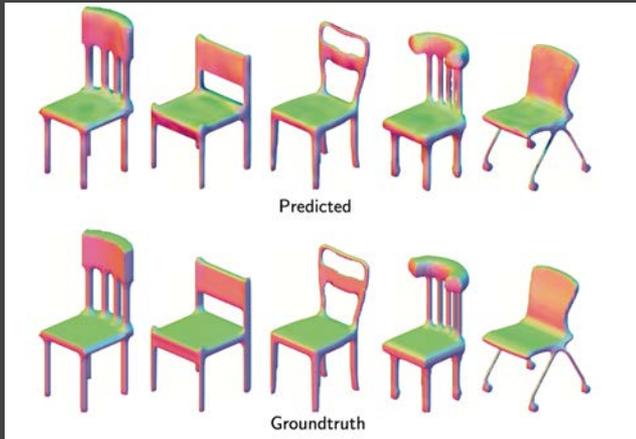
Aprendizaje en variedades



Las bases de datos existentes no toman en cuenta la distribución de tipos topológicos.

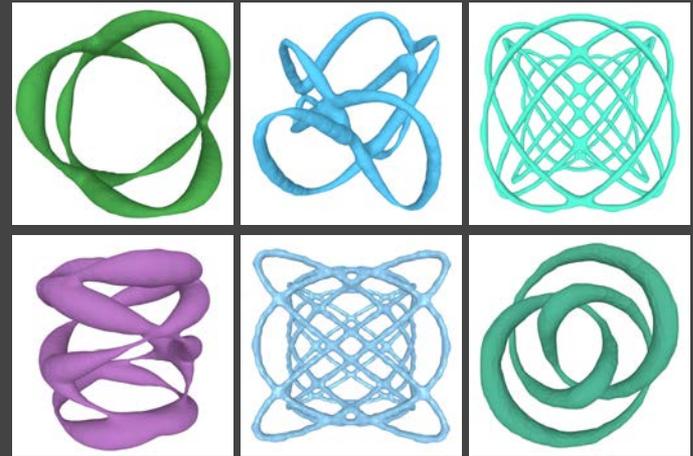
Yi 2017

Aprendizaje en variedades



Yi 2017

Las bases de datos existentes no toman en cuenta la distribución de tipos topológicos.



[EuLearn: A 3D database for learning Euler characteristics](#), R. Fritz, PSS, V. Mijangos, A. Martínez-Hernández, Eduardo Ivan Velazquez Richards, arXiv:2505.13539 [cs.CG], Mayo 2025.

EuLearn: enseñándole topología a las IAs

Colaboración con:

- ★ Rodrigo Fritz, IM UNAM
- ★ Anayanzi Martínez Hernández, F. Ciencias UNAM
- ★ Víctor Mijangos, F. Ciencias UNAM
- ★ Eduardo I. Velazquez Richards, IIMAS UNAM



dgapa

Dirección General de Asuntos
del Personal Académico



UNAM

DGTIC

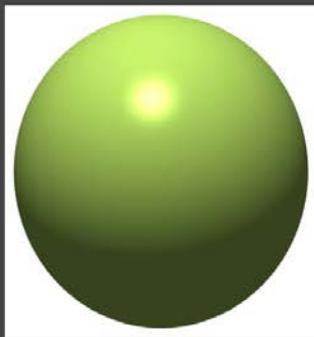
DIRECCIÓN GENERAL DE CÓMPUTO Y DE
TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN

Topological Genus

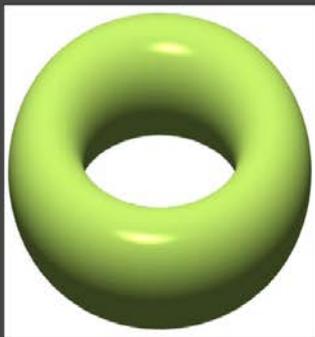
The topological genus g is a topological invariant.

It measures the complexity of a surface.

There is no systematic approach in current geometric databases that considers a **uniform distribution of topological genera**. This limitation hinders the development of algorithms that can robustly handle a diversity of topological types in **computational geometry** and **machine and deep learning** applications.



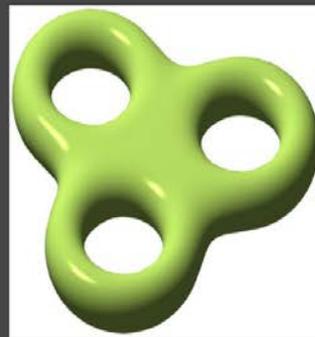
sphere
 $g = 0$



torus
 $g = 1$



2-torus
 $g = 2$



3-torus
 $g = 3$

Images from Wikipedia

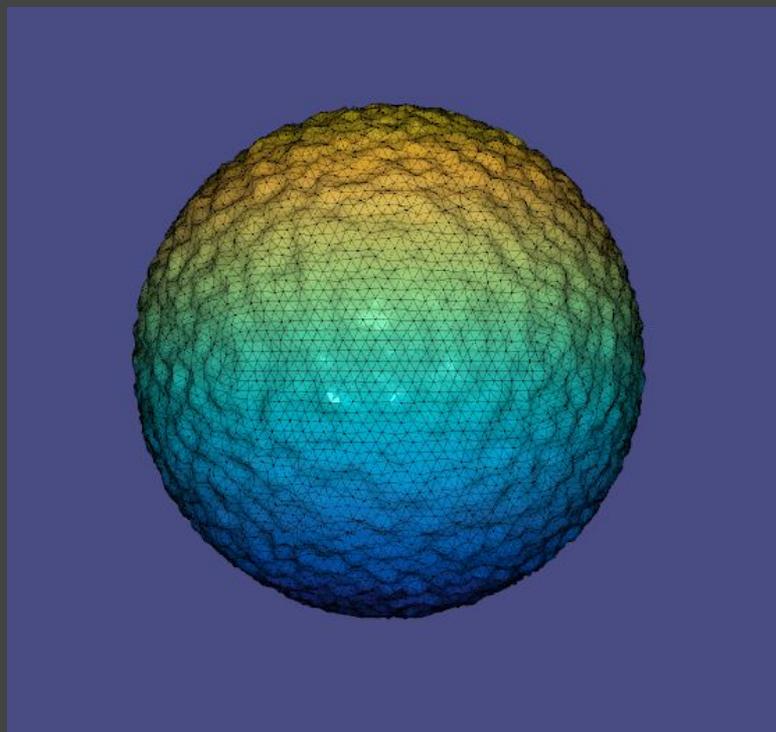
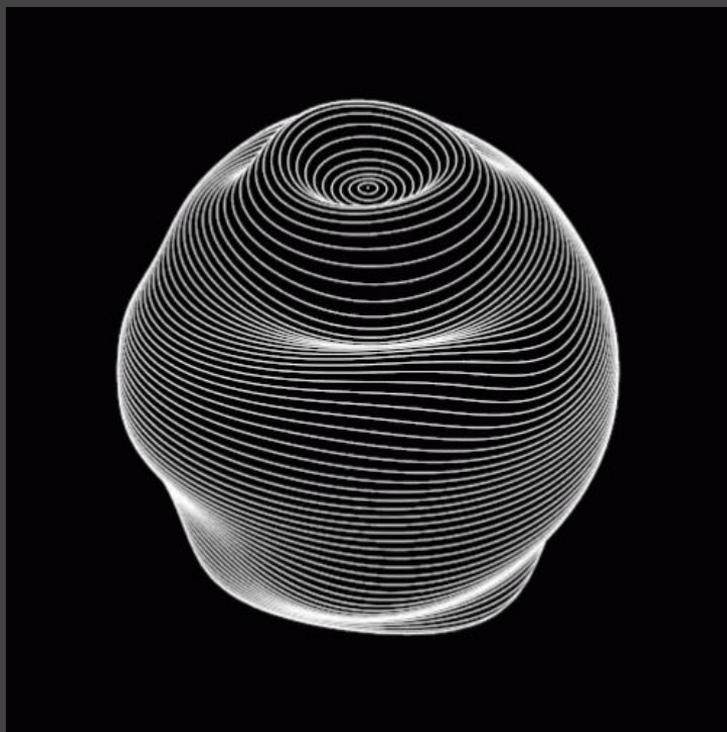
Euler Characteristic

Given a **triangulation** T of a **surface** S , where V are the number of **vertices**, E the number of **edges**, and F the number of **faces** of the triangulation, the integer number

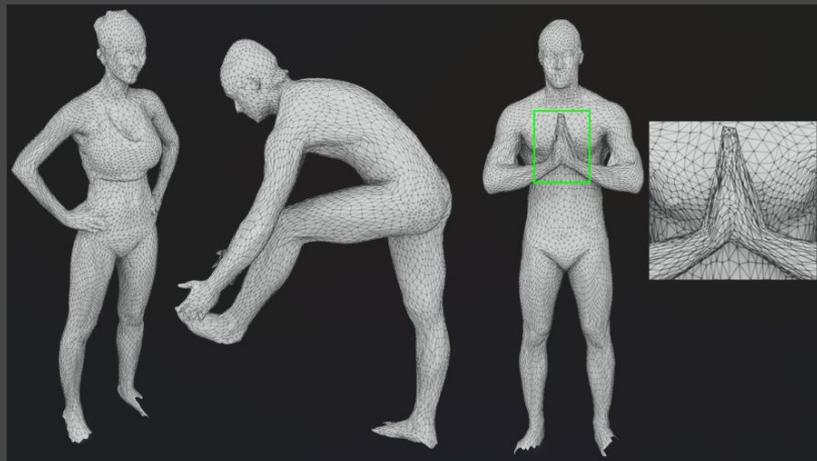
$$\chi(S) = V - E + F = 2 - 2g$$

is the **Euler characteristic** of the triangulation. And thus, the genus is

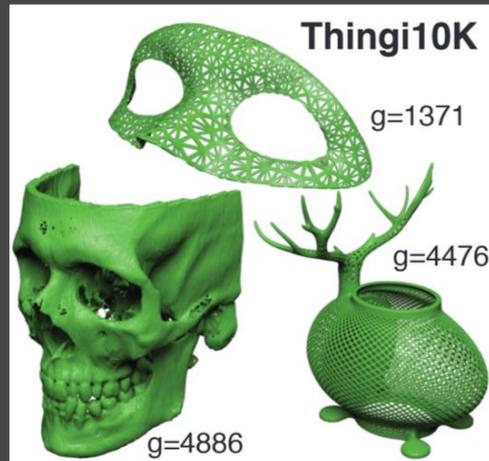
$$g = 1 - \frac{1}{2}\chi(S).$$



Geometric Datasets



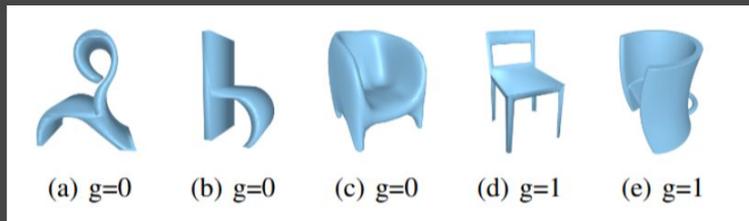
FAUST dataset ($g = 0$)



Thingi10K dataset



ABC dataset

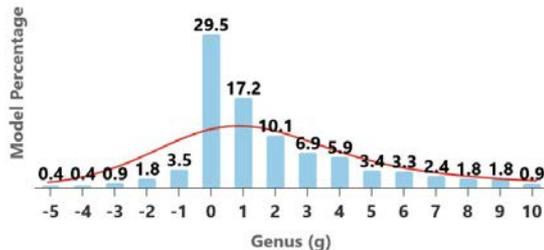


ShapeNet dataset

Genus distribution in datasets

Genus distribution of an ABC dataset sample

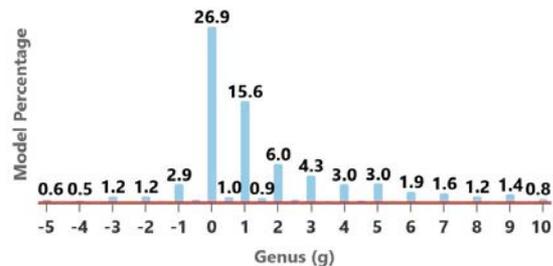
only the range [-5, 10] is shown



(a) Genus distribution for an ABC dataset sample of 2000 models.

Genus Distribution of Thingi10K Models

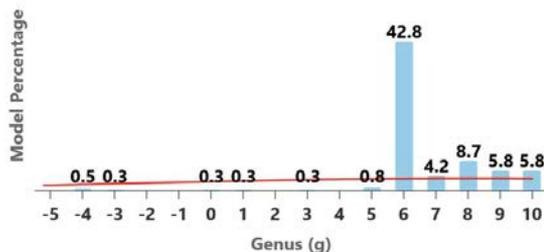
only the range [-5, 10] is shown



(b) Genus distribution for the 9997 models with defined Euler characteristic in the Thingi10K dataset summary file.

Genus distribution of SimJEB dataset

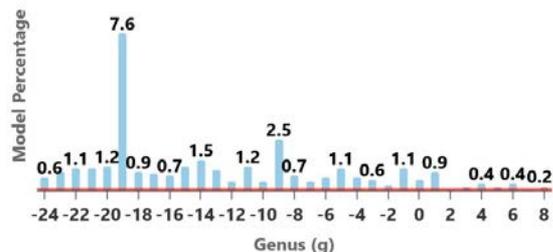
only the range [-5, 10] is shown



(c) Genus distribution for the 381 models in the SimJEB dataset.

Genus Distribution of a ShapeNet Sample

only the range [-24, 8] is shown



(d) ShapeNet genus distribution for the 1086 (out of 6778) chair models with defined Euler characteristic. All are non-valid meshes, except for the three of genus 0 and the two of genus 1 of Figure 10.

Our contribution

Our database consists of **3,300** surfaces, with each instance including:

1. An STL file with the raw surface.
2. An STL file with a smoothed version of the surface.
3. The radius of the tubular neighborhood around each node of the base curve.
4. The scalar field which determines the inner and outer regions of each surface.

We considered **genus 0 to 10**.

For each genus, we collected **15 examples of singular Lissajous knots**.

For each singular knot, we constructed **20 different tubular neighborhoods** of variable radius along the curve.

Singular Lissajous Knots

Singular Lissajous knots are parameterized as

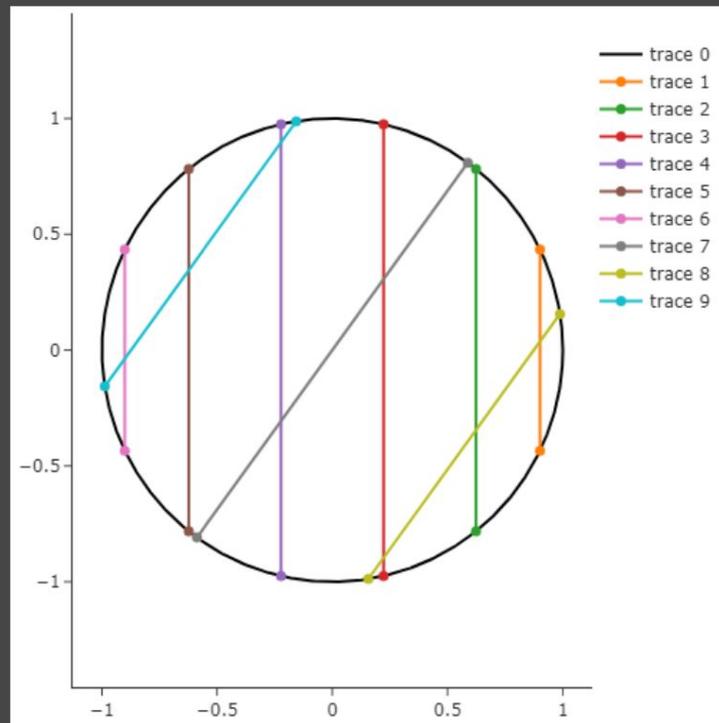
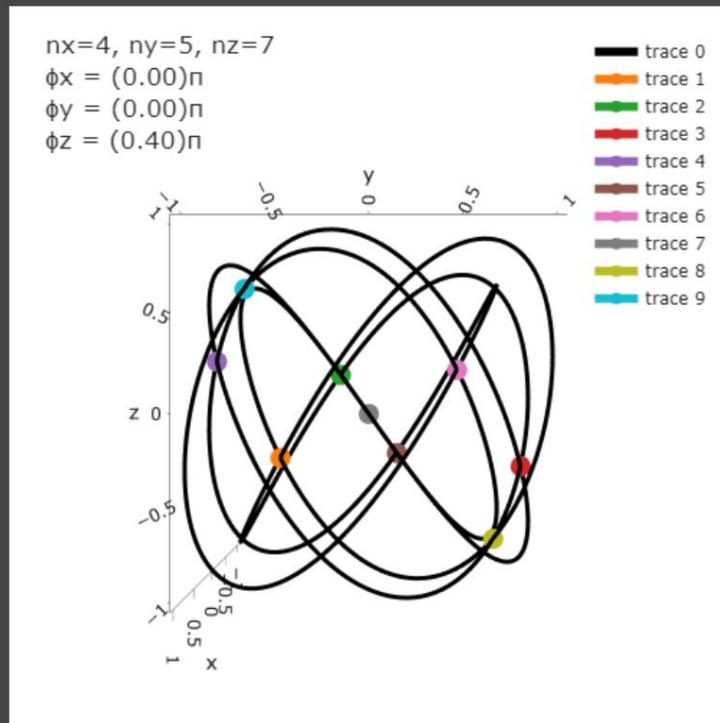
$$K(t) = (\cos(n_x t + \phi_x), \cos(n_y t + \phi_y), \cos(n_z t + \phi_z)),$$

where, $t, \phi_x, \phi_y, \phi_z \in [0, 2\pi)$, and $n_x \leq n_y \leq n_z \in \mathbb{Z}$ are **not necessarily relatively prime**, since they **have self-intersections**, as well as the phases being some particular multiples of π related to the frequency, mainly:

$$\phi_i = \frac{m}{n_i} \pi,$$

where $i \in \{x, y, z\}$ and $m \in \mathbb{Z}$ is such that $0 < m < n_i$.

4,5,7 and $\phi_z = (20/50)\pi$

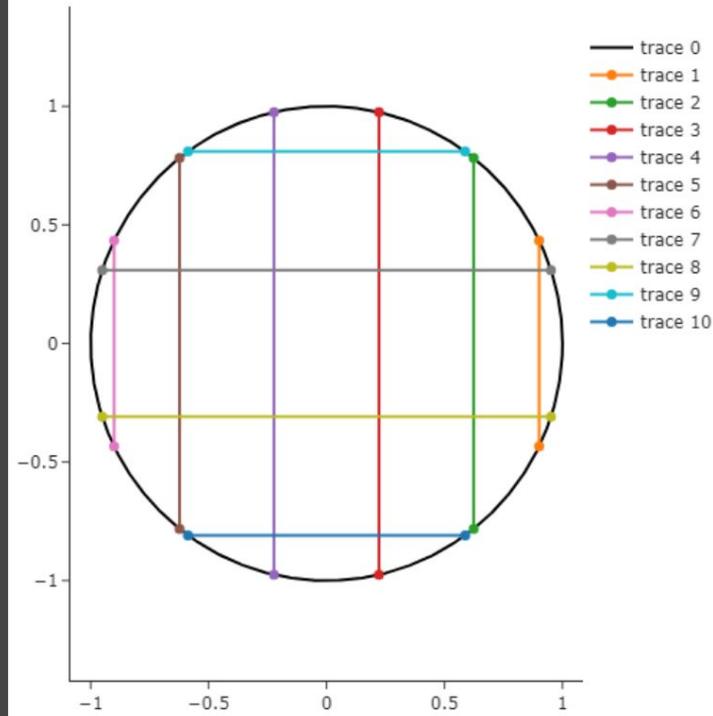
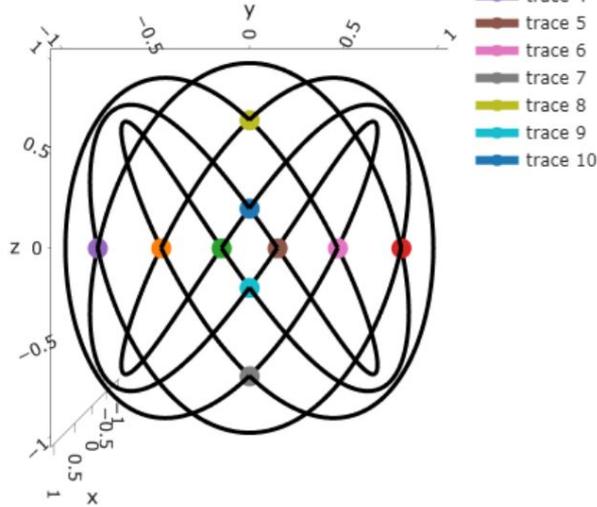


$$\phi_z = \left(\frac{20}{50}\right)\pi$$

Diagonal symmetries

4,5,7 and $\phi_z = (25/50)\pi$

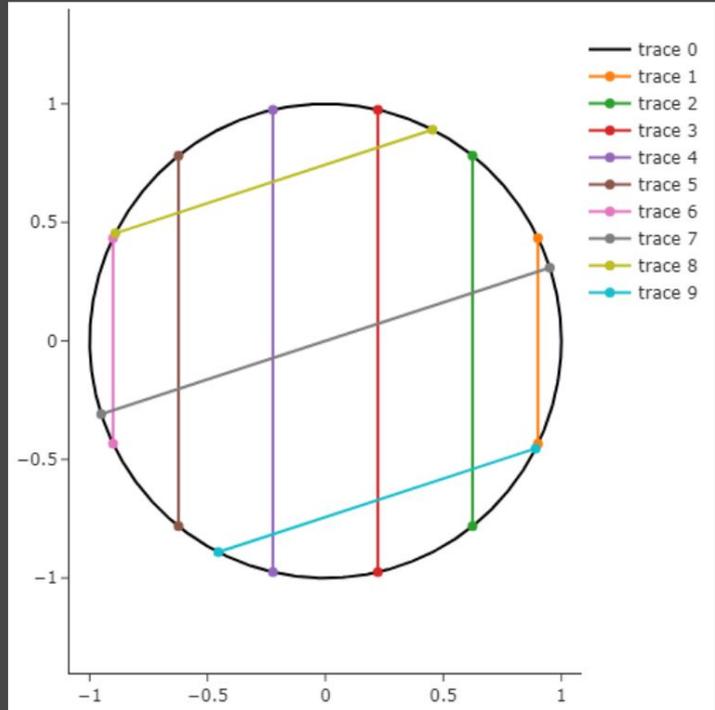
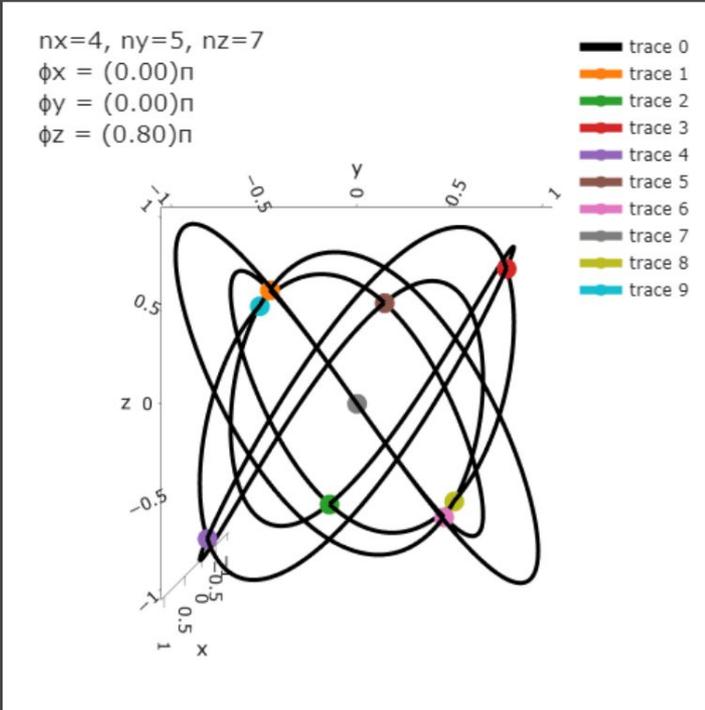
$n_x=4, n_y=5, n_z=7$
 $\phi_x = (0.00)\pi$
 $\phi_y = (0.00)\pi$
 $\phi_z = (0.50)\pi$



$$\phi_z = \left(\frac{25}{50} \right) \pi$$

Horizontal symmetries

4,5,7 and $\phi_z = (40/50)\pi$

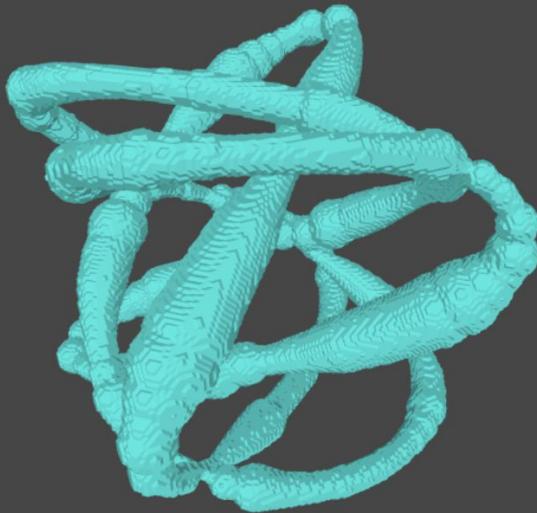
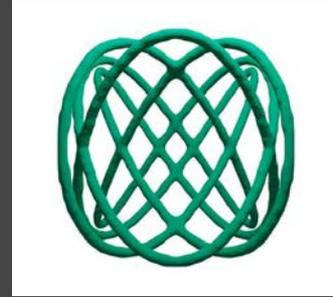


$$\phi_z = \left(\frac{40}{50}\right)\pi$$

Diagonal symmetries

Surface Construction Pipeline

1. Parameterization
2. Tubular Neighborhood Radius
3. Scalar Field
4. Marching Cubes
5. Smoothing



Non-singular Surfaces

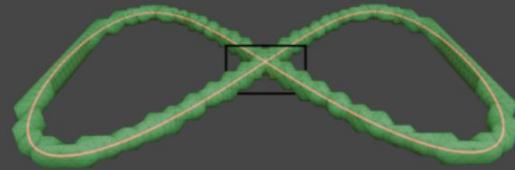
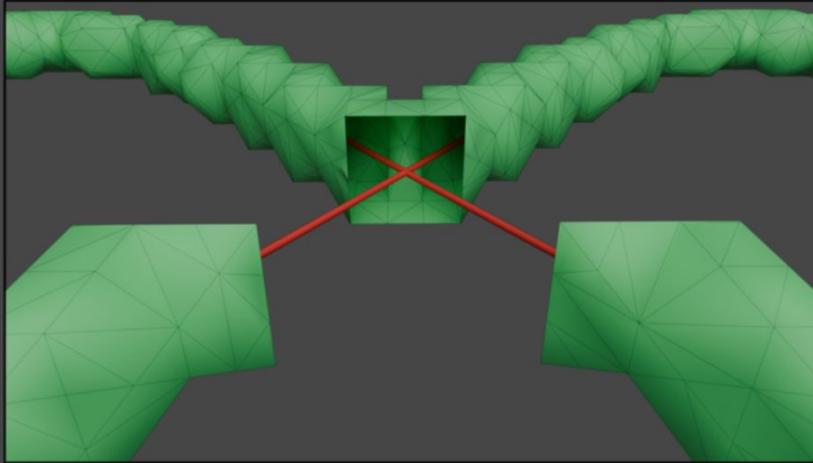
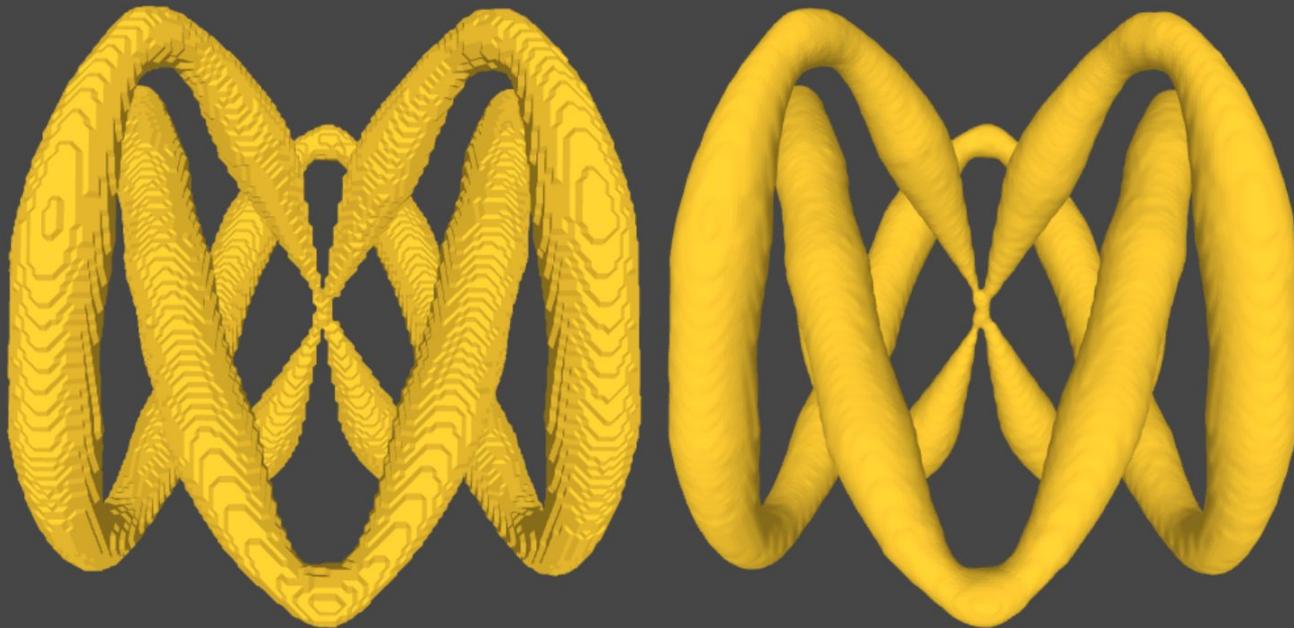


Figure by Eduardo Velázquez Richards

Reach Approximation



Code by Anayanzi Martínez

Our database



$g = 0$



$g = 1$



$g = 2$



$g = 3$



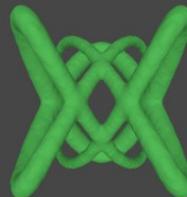
$g = 4$



$g = 5$



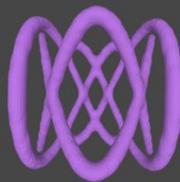
$g = 6$



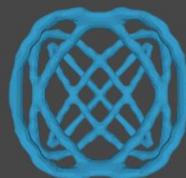
$g = 7$



$g = 8$



$g = 9$



$g = 10$

EuLearn Samples by Genus



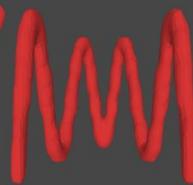
$g = 0$



$g = 0$



$g = 0$



$g = 0$



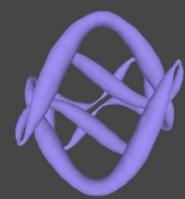
$g = 1$



$g = 1$



$g = 1$



$g = 1$



$g = 2$



$g = 2$



$g = 2$



$g = 2$

EuLearn Samples by Genus

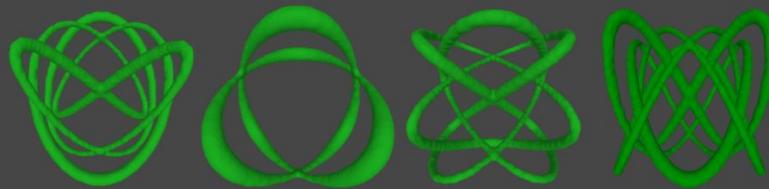


$g = 3$

$g = 3$

$g = 3$

$g = 3$



$g = 4$

$g = 4$

$g = 4$

$g = 4$



$g = 5$

$g = 5$

$g = 5$

$g = 5$

EuLearn: enseñándole topología a las IAs

Análisis experimental; revisamos el desempeño de varias arquitecturas emblemáticas y punteras (SOTA) de la IA en visión computacional evaluando si podían aprender el género de las superficies de ***EuLearn***.

- *Fourier Neural Network (FNO)*
- *Deep Graph Convolutional Neural Network (DGCNN)*
- *Pointnet ++*
- *Attention (3D Transformer)*

| Model | Precision | Recall | F₁ | Acc. |
|----------------------|------------------|---------------|----------------------|-------------|
| Attention (classic) | 0.01 | 0.10 | 0.02 | 0.10 |
| FNO | 0.02 | 0.11 | 0.04 | 0.20 |
| DGCNN | 0.07 | 0.14 | 0.07 | 0.16 |
| PointNet (classic) | 0.50 | 0.49 | 0.43 | 0.49 |
| PointNet++ | 0.50 | 0.54 | 0.52 | 0.63 |
| GS PointNet* (ours) | 0.82 | 0.79 | 0.78 | 0.79 |
| GS Attention* (ours) | 0.81 | 0.81 | 0.79 | 0.81 |

Table 1: Summary of the results obtained with different methods. The training set consisted of 1925 surfaces, while the test set consisted in 825 surfaces. *Graph Sampled (GS) PointNet and GS Attention are tailored architectures for our dataset.

EuLearn: enseñándole topología a las IAs

Las implementaciones clásicas fallaron en la tarea de clasificación de género en **EuLearn**.

Para mejorar el desempeño desarrollamos un algoritmo de muestreo no-euclídeo basado en vecindades de adyacencia que toman en cuenta la estructura topológica, introduciendo dos modelos nuevos.

- GS (Graph Sampled) Pointnet
- GS (Graph Sampled) Attention

| Model | Precision | Recall | F ₁ | Acc. |
|----------------------|-------------|-------------|----------------|-------------|
| Attention (classic) | 0.01 | 0.10 | 0.02 | 0.10 |
| FNO | 0.02 | 0.11 | 0.04 | 0.20 |
| DGCNN | 0.07 | 0.14 | 0.07 | 0.16 |
| PointNet (classic) | 0.50 | 0.49 | 0.43 | 0.49 |
| PointNet++ | 0.50 | 0.54 | 0.52 | 0.63 |
| GS PointNet* (ours) | 0.82 | 0.79 | 0.78 | 0.79 |
| GS Attention* (ours) | 0.81 | 0.81 | 0.79 | 0.81 |

Table 1: Summary of the results obtained with different methods. The training set consisted of 1925 surfaces, while the test set consisted in 825 surfaces. *Graph Sampled (GS) PointNet and GS Attention are tailored architectures for our dataset.

EuLearn: enseñándole topología a las IAs

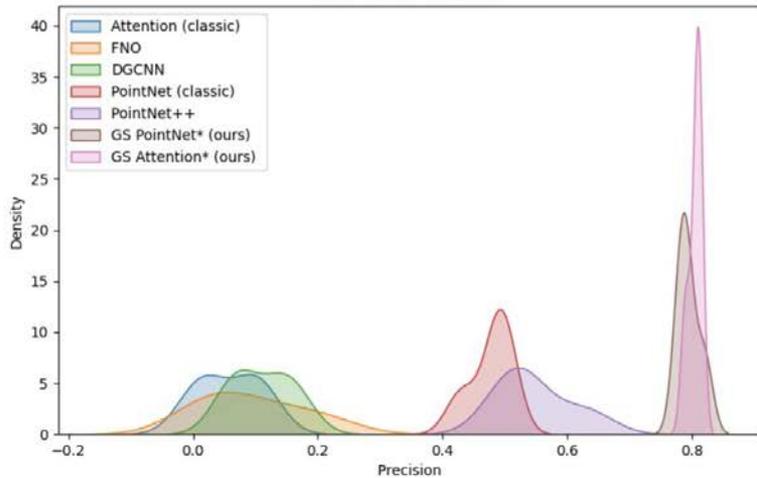
Las implementaciones clásicas fallaron en la tarea de clasificación de género en ***EuLearn***.

Para mejorar el desempeño desarrollamos un algoritmo de muestreo no-euclídeo basado en vecindades de adyacencia que toman en cuenta la estructura topológica, introduciendo dos modelos nuevos.

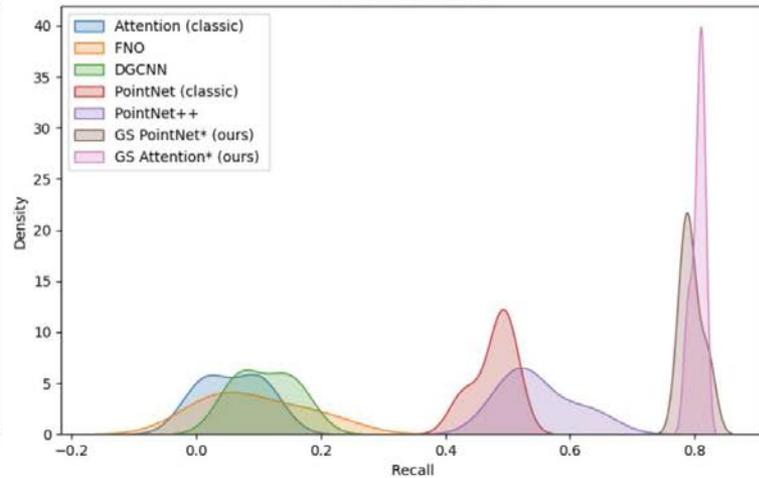
Algorithm 2 Graph Sampling (GS)

```
1: Procedure: Sampling  $X$ ,  $G = (V, E)$ ,  $sample\_size$ 
2:  $N \leftarrow \text{SORTED}(V)$ 
3:  $k \leftarrow 0$ 
4: while  $k < sample\_size$  do
5:    $actual\_node \leftarrow \text{TOP}(N)$ 
6:    $neighbors \leftarrow \text{GETNEIGHBORS}(actual\_node)$ 
7:    $sampled\_neighbors \leftarrow \text{SAMPLE}(neighbors)$ 
8:   Remove from  $N$ ,  $X$  and  $V$  the not sampled nodes.
9:   Reconnect points in  $E$ 
10:   $k \leftarrow k + |sampled\_neighbors| + 1$ 
11: end while
12: end Procedure
```

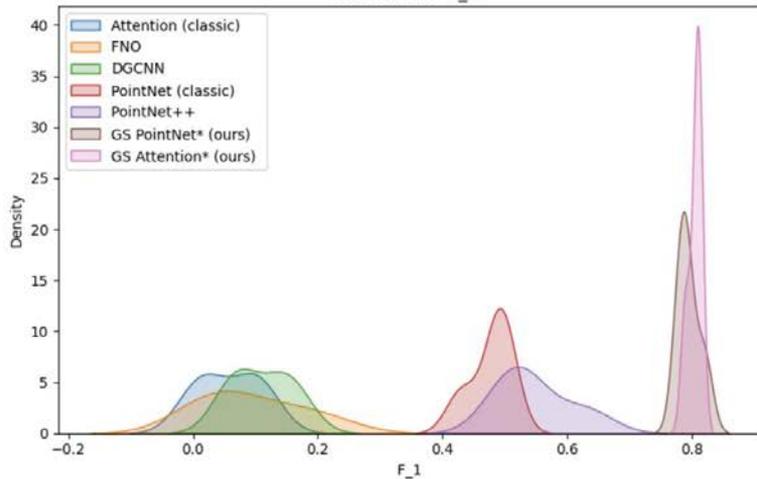
KDE Plot for Precision



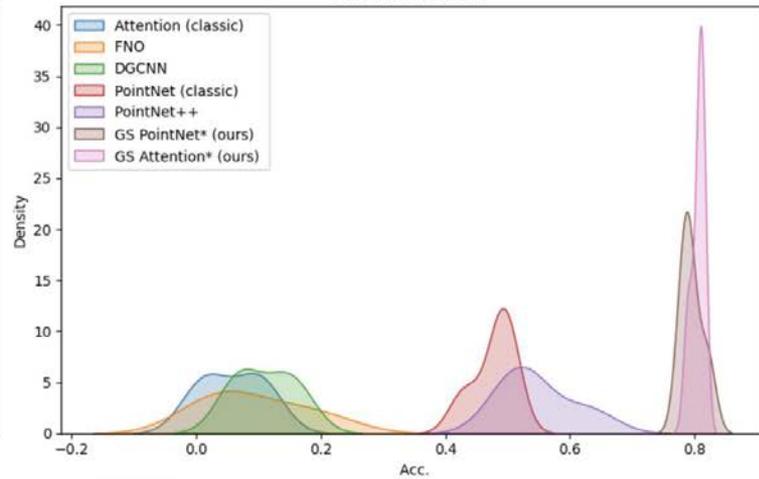
KDE Plot for Recall



KDE Plot for F_1



KDE Plot for Acc.

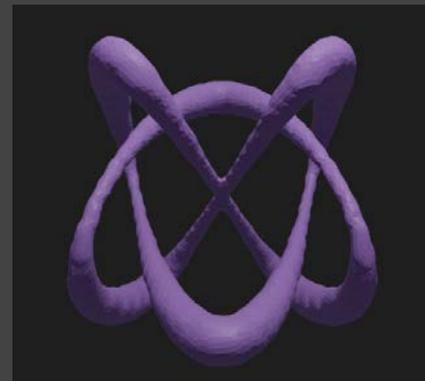


[Submitted on 18 May 2025]

[arXiv:2505.13539](https://arxiv.org/abs/2505.13539) [cs.CG]

EuLearn: A 3D database for learning Euler characteristics

Rodrigo Fritz, Pablo Suárez-Serrato, Victor Mijangos, Anayanzi D. Martínez-Hernandez, Eduardo Ivan Velazquez Richards



[Submitted on 18 May 2025]

[arXiv:2505.13539](https://arxiv.org/abs/2505.13539) [cs.CG]

EuLearn: A 3D database for learning Euler characteristics

Rodrigo Fritz, Pablo Suárez-Serrato, Victor Mijangos, Anayanzi D. Martinez-Hernandez, Eduardo Ivan Velazquez Richards



Search models, datasets

Models

Datasets

Spaces

Docs

Pricing

Log In

Sign Up

Datasets: [appliedgeometry/EuLearn](#)

like 0

Follow [Applied Geometry Lab](#) 4

Tasks: [Feature Extraction](#) [Graph Machine Learning](#) [Text-to-3D](#) + 2 Modalities: [3D](#) [Text](#) Formats: [text](#)

Languages: [English](#) Size: [10M - 100M](#) Tags: [Mathematics](#) [Topology](#) [Geometry](#) [Knot Theory](#) [Euler Characteristic](#) [Genus](#)

Libraries: [Datasets](#) [Croissant](#) License: [mit](#)

[Dataset card](#)

[Data Studio](#)

[Files](#)

[Community](#) 2

Dataset Viewer (First 5GB)

[Auto-converted to Parquet](#)

[API](#)

[Embed](#)

[Data Studio](#)

Downloads last month

2,769

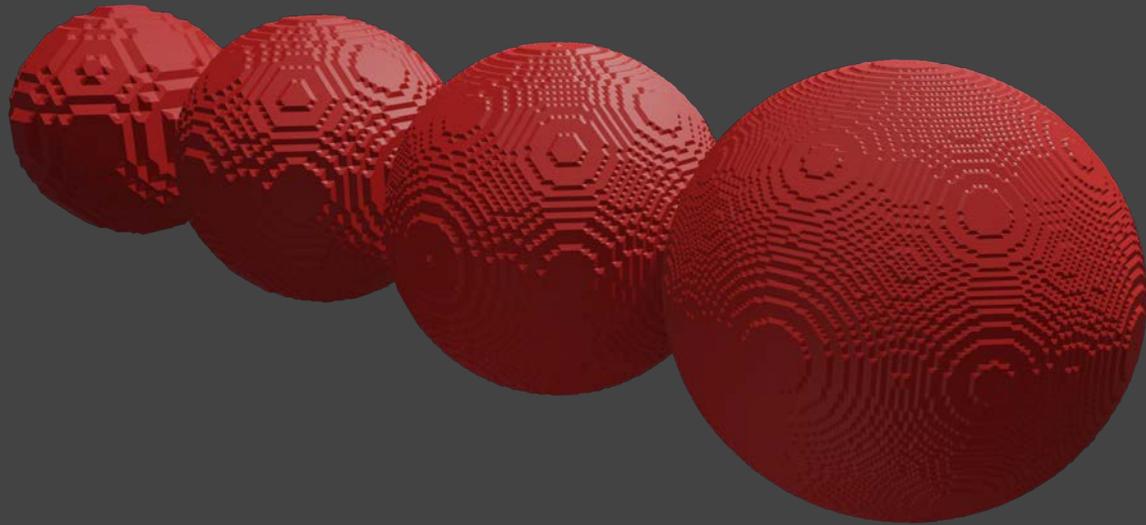
Más de 2,700
descargas en
los primeros
5 días



Conclusiones

- ★ La Geometría ha tenido una influencia importante en el desarrollo de la IA.
- ★ Los sistemas actuales carecen de información topológica para ser entrenados efectivamente.
Contribuimos desde la UNAM con ***EuLearn***, la primera base de datos de superficies con tipos topológicos uniformemente distribuidos, para así entrenar sistemas de visión computacional.
- ★ A futuro, hace falta más integración de la teoría en Geometría y Topología con las implementaciones en sistemas de aprendizaje automático.

¡Gracias por su atención!



¿Preguntas?