

TABLAS DE VERDAD

Axel Arturo Barceló Aspeitia

Borrador de Conferencia

– Lógica Clara –

Las tablas de verdad son, por una parte, uno de los métodos más sencillos y conocidos de la lógica formal, pero la mismo tiempo también uno de los más poderosos y claros. Entender bien las tablas de verdad es, en gran medida, entender bien a la lógica formal misma. En esta plática quiero ensayar algunas reflexiones alrededor de las tablas de verdad cómo pretexto

I. Los Métodos Sintáctico y Semántico en Lógica y Semántica

So hacemos caso a lo que Geoffrey Hunter dice en la introducción a su libro *Metalogic* (1971, 3), desde el punto de vista de la metalógica, los métodos sintácticos y semánticos de la lógica formal son métodos alternativos para detectar las verdades lógicas de un lenguaje.¹ Ambas parten del ideal de encontrar un método formal – es decir, uno que atienda sólo a la forma lógica de los enunciados (y no a su contenido, para garantizar su analiticidad) , y sea efectivo de manera mecánica (para garantizar su a-prioricidad) – para reconocer verdades lógicas. Sin embargo, parten de intuiciones distintas. El método de pruebas, fundado por Frege en su *Conceptografía* (1879), parte de la intuición de que el método formal a-priori por excelencia es la prueba matemática y trata de extender la noción de prueba formal estricta de las matemáticas a la lógica. El método semántico, por su parte, está fundado en el análisis lógico-semántico de por tablas de verdad propuesto por Ludwig Wittgenstein (1921) y Bertrand Russell (1918). Aunque dicho método de análisis era ya conocido en la tradición lógica-algebraica, y que Peirce (en notas no publicadas, anteriores a 1910²) y Post (1920) habían utilizado ya tablas de verdad, fueron Russell y Wittgenstein los que divulgaron este método como instrumento de análisis del significado de

¹. Sin embargo, estos métodos también nos sirven para detectar relaciones de consecuencia lógica. En otras palabras, también nos sirven para determinar la validez lógica de argumentos, no solo la verdad lógica de enunciados. Existe, dentro de la filosofía de la lógica toda una discusión acerca de cuál de estos dos papeles es lemas importante. Hunter (1971) piensa que la verdad lógica es más fundamental que la validez. La presentación clásica de esta posición se encuentra en (Quine 1969). Más recientemente, Ian Hacking (1994) y John Etchemendy (1990) han defendido la posición contraria: que la noción de consecuencia lógica es más fundamental. Es interesante notar que aquellos que piensan que la verdad lógica es más fundamental que la validez tienden a ser representacionistas, mientras que sus oponentes suelen ser inferencialistas. Más adelante en estas notas veremos que quieren decir éstos dos términos.

². Cf. Fisch and Turquette (1966) y Agnellis (1994). Nótese que lo importante para la fundamentación del método semántico, no es lo que Shosky (1997) llama el dispositivo [device] de tablas de verdad, sino el método [technique] de tablas de verdad, es decir, el método de análisis veritativo-funcional del significado.

los enunciados en términos de condiciones de verdad (en contraste con Frege, quién identificaba al significado – contenido conceptual – de los enunciados con su rol inferencial). Según Wittgenstein, el método de tablas de verdad sirve para determinar las condiciones de verdad de un enunciado, es decir, su significado, en función de las condiciones de verdad de sus elementos atómicos. En otras palabras, la tabla de verdad nos dice en qué situaciones el enunciado es verdadero y en cuales es falso.³ Esta idea evolucionó en la teoría de descripciones de estado de Carnap (1946) y, posteriormente, las teorías semánticas de mundos posibles de Prior (1956), S. Kanger (1957), Hintikka (1957, 1961) y Kripke (1963) y de situaciones de Barwise y Perry (1983) que siguen vigentes hasta la fecha.

Cómo este tipo de métodos surgió originalmente como método de análisis semántico, se les conoce como métodos semánticos. En contraste, el método de pruebas se conoce como sintáctico. Sin embargo, vale la pena mencionar que el método de pruebas también ha sido interpretado como un método de análisis semántico, pues hay quienes piensan que las reglas de inferencia pueden verse también como definiciones. En su seminal artículo (1935), G. Gentzen propuso que las reglas de inferencia del método de deducción natural se vieran como definiciones de los conectivos lógicos. Aquellos que utilizan el método de pruebas como instrumento de análisis semántico, como Gilbert Harman (1986, 1987) y Robert Brandom (2000), entre otros, se llaman a sí mismos inferencialistas, funcionalistas o teóricos del rol conceptual.⁴ Aquellos que prefieren teorías del significado más cercanas a la propuesta de Wittgenstein, son conocidos como representacionalistas,⁵ pues los métodos semánticos que usan pueden interpretarse como involucrando algún elemento que representa al mundo. En el método de tablas de verdad, por ejemplo, los distintos renglones pueden verse como representando diferentes maneras en que el mundo pudo haber sido.⁶ En contraste, es claro que en el método de pruebas formales no hay ningún elemento que represente ningún aspecto del mundo o cosa parecida.

³. En consecuencia, para Wittgenstein (1921), las tautologías (y las contradicciones) eran casos degenerados en los cuales no se distinguía entre situaciones que hacían el enunciado verdadero y situaciones que lo hacían falso. Por ello, Wittgenstein creía que carecían de significado (y por eso las llamo ‘tautologías’). (Dreben y Floyd 1991)

⁴. De ahora en adelante, usare sólo el primer término.

⁵. No es de sorprender que los inferencialistas tengan como prócer a Frege. Por otro lado, los representacionalistas no se identifican directamente con Wittgenstein, ni con Russell, sino con Tarski (1936), quien extendió la propuesta semántica a una teoría más sofisticada de la verdad y la consecuencia lógica en los lenguajes formales.

⁶. Digo que pueden interpretarse o verse así, pero es también debatible si tal interpretación es correcta. En otras palabras, aunque los métodos semánticos pueden interpretarse representacionalmente, no es necesario interpretarlos así. Pueden interpretarse también interpretacionalmente, de tal manera que, siguiendo el mismo ejemplo de tablas de verdad, los distintos renglones pueden verse como representando diferentes significados que podrían tener los enunciados atómicos en cuestión. En su seminal (1990) Etchemendy ha demostrado que la pregunta no es ociosa.

En el continuo diálogo y debate entre inferencialistas y representacionistas, ha surgido la hipótesis de que, a fin de cuentas, la información semántica que se obtiene por los métodos sintáctico y semántico sea equivalente. Llamo a ésta la tesis de la equivalencia semántica entre lo inferencial y lo representacional. En contraste, un inferencialista genuino es aquel que se opone a la tesis de la equivalencia semántica, sosteniendo que el papel inferencial de un término es un aspecto irreducible de su significado. (Análogicamente, un representacionista genuino sería aquel que creyera que el contenido representacional es irreducible al inferencial, es decir, que la información semántica contenida en los métodos semánticos es irreducible a la información semántica contenida en los métodos sintácticos). La tesis de la equivalencia semántica aplicada al cálculo proposicional, por ejemplo, diría que la información semántica sobre el significado de las conectivas lógicas en las tablas de verdad es la misma que la contenida en las reglas de inferencia y/o los axiomas. Para que la tesis de la equivalencia semántica sea viable, por supuesto, es necesario que los métodos sintáctico y semántico converjan y den los mismos resultados. En términos metalógicos, es necesario que ambos tipos de métodos sean mutuamente completos y correctos.

Ahora bien, dentro del inferencialismo genuino, hay varias posiciones. Un Inferencialista extremo es aquel quien cree que el significado de cualquier término está completamente determinado por su rol inferencial. Los inferencialistas moderados reconocen que, por lo menos para algunos términos, el significado no se reduce al rol inferencial. Reconocen que existen otros componentes irreducibles del significado, comúnmente de tipo representacional. Existen, entonces, dos tipos de inferencialistas moderados: aquellos que sostienen que existen cierto tipo de términos cuyo significado está completamente determinado por su rol inferencial, y aquellos que no. En el primer caso, el ejemplo típico de términos cuyo significado es completamente inferencial se encuentran las palabras lógicas.

Ahora bien, si recuerdan, una de las razones por las que se quería que estos métodos fueran formales era por qué se pensaba que, al atender a la mera forma de los enunciados, se eliminaba cualquier referencia a su contenido o al mundo, garantizando así la analiticidad de sus resultados. Ahora, sin embargo, hemos hablado de un método semántico y representacional que opera con representaciones del mundo. ¿Acaso no implica esto que este tipo de métodos no son en realidad completamente formales? Buena pregunta, pero de difícil respuesta. Para responderla es necesario señalar que los métodos sintáctico y semántico no sólo son métodos formales distintos, que parten de intuiciones metodológicas distintas, sino que también tratan de capturar la noción de verdad lógica de manera distinta: a través de la aprioricidad en el caso de los métodos sintácticos y a través de la necesidad en el caso de los métodos semánticos. Los métodos sintácticos optan por una definición de verdad lógica más cercana a a, y los semánticos a b.

p es lógicamente verdadera sii

- (a) Es posible determinar la verdad de p sin apelar en lo absoluto al mundo.

(b) De cualquier manera como fuera el mundo, p sería verdadera (p es verdadera en todo mundo posible).⁷

El método sintáctico parte de una visión de la verdad lógica en la que la a-prioricidad es su característica esencial, y es a partir de ella que se puede explicar su universalidad, analiticidad o necesidad. El método semántico, en contraste, le da este papel a la necesidad lógica. Por eso el método de prueba se enorgullece de no incluir ningún elemento que refiera al mundo. Por qué parte de que la verdad lógica, para ser tal, debe ser capturable sin referencia alguna al mundo o a ninguna manera de ser del mismo. Mientras que el método semántico funciona a través de lo que se ha llamado el método de variación, en el cual, en vez de no hacer ninguna mención al mundo, por el contrario, es necesario contar con un aparato para representar todas las maneras en que el mundo puede ser, y verificar si en cada una de ellas, el enunciado es verdadero (por ejemplo, en cálculo proposicional, ver si en toda asignación de valores de verdad a las variables proposicionales, es decir, en todo renglón de la tabla de verdad, el enunciado es verdadero). Etchemendy (1990), McGee (1992) y otros han argumentado que tal vez esta no sea la mejor manera de capturar la noción de necesidad lógica y, por lo tanto, tampoco la de verdad lógica. Pero lo importante para nuestra presentación es que, no por simplemente apelar a representaciones del mundo, los métodos semánticos pierden su carácter formal y dejan de ser a-priori o analíticos.

La así llamado “semántica formal” o teoría de la interpretación está fundado en el análisis lógico-semántico de por tablas de verdad propuesto por Ludwig Wittgenstein (1921) y Bertrand Russell (1918). Aunque dicho método de análisis era ya conocido en la tradición lógica-algebraica, y que Peirce (en notas no publicadas, anteriores a 1910⁸) y Post (1920) habían utilizado ya tablas de verdad, fueron Russell y Wittgenstein los que divulgaron este método como instrumento de análisis del significado de los enunciados en términos de condiciones de verdad (en contraste con Frege, quién identificaba al significado – contenido conceptual – de los enunciados con su rol inferencial). Según Wittgenstein, el método de tablas de verdad sirve para determinar las condiciones de verdad de un enunciado, es decir,

7. Esta es la interpretación representacional. Recuerden que habíamos dicho ya que hay quienes interpretan los métodos semánticos de manera interpretivista. Para ello, p es verdad lógica, si es verdadera y seguiría siendo verdadero de cualquier manera en que se re-interpretara su vocabulario no-lógico. De esta manera, podríamos completar nuestra lista de opciones con una tercera alternativa (c) donde p es verdadera independientemente del significado particular de su vocabulario no-lógico. De esta manera, los métodos semánticos, bajo una interpretación interpretivista, privilegiarían la analiticidad tanto sobre la a-prioricidad como la necesidad.

8. Cf. Fisch and Turquette (1966) y Agnellis (1994). Nótese que lo importante para la fundamentación del método semántico, no es lo que Shosky (1997) llama el dispositivo [device] de tablas de verdad, sino el método [technique] de tablas de verdad, es decir, el método de análisis veritativo-funcional del significado.

su significado, en función de las condiciones de verdad de sus elementos atómicos. En otras palabras, la tabla de verdad nos dice en qué situaciones el enunciado es verdadero y en cuales es falso.⁹ Esta idea evolucionó en la teoría de descripciones de estado de Carnap (1946) y, posteriormente, las teorías semánticas de mundos posibles de Prior (1956), S. Kanger (1957), Hintikka (1957, 1961) y Kripke (1963) y de situaciones de Barwise y Perry (1983) que siguen vigentes hasta la fecha.

Varios métodos de prueba del cálculo proposicional, entre ellos el de tablas de verdad, se basan en una concepción muy tradicional del análisis lógico, según la cual el objetivo de éste es determinar las condiciones necesarias y suficientes de la verdad de una proposición o enunciado. Cada renglón de la tabla que hace verdadero al enunciado en cuestión determina una condición suficiente para su verdad. En cada renglón, los valores asignados a cada variable proposicional determinan una condición necesaria del renglón. Pongamos un ejemplo. Supongamos que queremos hacer la tabla de verdad del siguiente enunciado:

(15) Si tu hermana no pasa el examen, estarás en graves problemas.¹⁰

Identificamos las proposiciones atómicas y les asignamos una variable:

P: Tu hermana pasa el examen

Q: Estarás en graves problemas

De esta manera, podemos formalizar (15) como $(\sim P) \Rightarrow Q$ y construir su tabla de la siguiente manera:

P	Q	$(\sim P) \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

⁹. En consecuencia, para Wittgenstein (1921), las tautologías (y las contradicciones) eran casos degenerados en los cuales no se distinguía entre situaciones que hacían el enunciado verdadero y situaciones que lo hacían falso. Por ello, Wittgenstein creía que carecían de significado (y por eso las llamo ‘tautologías’). (Dreben y Floyd 1991)

¹⁰. Obviemos por el momento los elementos sensibles al contexto de estos enunciados, como pronombres y tiempos verbales.

¿Qué es lo que nos dice el primer renglón de la tabla? Nos dice que si P y Q son ambos verdaderos, $(\neg P) \Rightarrow Q$ también lo es. En otras palabras, basta que “Tu hermana pasa el examen” y “Estarás en graves problemas” sean verdaderos para que “Si tu hermana no pasa el examen, estarás en graves problemas” sea verdadero. Es decir, la (condición) suficiente para que (17) sea verdadero implica que tu hermana pase el examen y tú estés en problemas en el futuro. Lo mismo sucede con cada uno de los tres primeros renglones de la tabla (los que hacen verdaderos a $(\neg P) \Rightarrow Q$). Basta que P sea verdadero y Q falso o que P sea falso y Q verdadero para que $(\neg P) \Rightarrow Q$ sea verdadero.

Si analizamos cada renglón, veremos que el valor asignado a cada columna es una condición necesaria de cada renglón. Cuando consideramos el tercer renglón, por ejemplo, y decimos que es condición suficiente de (15) que tú hermana no pase el examen —es decir, que P sea falsa— y que tengas graves problemas —es decir, que Q sea verdadera—; cada uno de los conyuntos es necesario para que se dé la condición suficiente. No basta que tu hermana no pase el examen, también es necesario que tú estés en graves problemas si tu hermana no pasa el examen. Es por ello que cada renglón se lee de manera conjuntiva y el enunciado para analizar es equivalente a la disyunción de cada uno de los renglones de la tabla que lo hacen verdadero. Esto es lo que hacemos explícito en las formas normales disyuntivas. En nuestro ejemplo, el primer renglón corresponde a la conjunción $P \& Q$, el segundo a $P \& \neg Q$ y el tercero a $(\neg P) \& Q$ (no incluimos el cuarto, pues no hace verdadera la fórmula). La disyunción de estas tres conjunciones es la forma normal disyuntiva de (15):

$$((\neg P) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \& Q) \vee (P \& \neg Q) \vee ((\neg P) \& Q))$$

La forma normal conjuntiva también resulta de concebir la tabla de verdad como un análisis clásico. En este caso, sin embargo, los renglones relevantes son los que hacen falso al enunciado para analizar. Como este tipo de análisis es el dual del análisis anterior, todas las operaciones lógicas se invierten. A cada renglón le corresponde una disyunción en vez de una conjunción, y cada conyunto es el opuesto de su correspondiente en el análisis anterior. Por ejemplo, ya vimos que si da verdadero para la fórmula final, al tercer renglón de la tabla de dos variables (P y Q), le corresponde la conjunción $((\neg P) \& Q)$. Por dualidad, si diera falso, le correspondería la disyunción $(P \vee (\neg Q))$. Finalmente, en vez de una disyunción de las conjunciones correspondientes a los renglones que dan verdadero, la forma normal conjuntiva

resulta de la conjunción de las disyunciones correspondientes a cada renglón que da falso. En el caso de (15), sólo hay un renglón, así que la forma normal conjuntiva correspondiente tendría un solo conyunto: la disyunción correspondiente al cuarto renglón.

$$((\neg P) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$$

Por lo menos en el caso de las conectivas extensionales, las tablas de verdad y las reglas de inferencia (de introducción y eliminación) de un conectivo son equivalentes y es fácil demostrarlo.¹¹ Basta definir la inferencia lógica (el concepto clave en las reglas de inferencia) en términos de condiciones de verdad (el concepto clave en las tablas de verdad). Así, decir que una proposición implica a otra equivale a decir que la primera no puede ser verdadera, sin la otra serlo también; en otras palabras, para cualquier circunstancia de evaluación,¹² si la primera es verdadera, la segunda también lo es. Bajo esta equivalencia, se puede demostrar fácilmente que las reglas de introducción y eliminación de los conectivos extensionales contienen la misma información sobre el significado de los conectivos lógicos que las funciones de verdad. En el caso de la conjunción, por ejemplo, las reglas de introducción y eliminación dirían que, en cualquier circunstancia de evaluación:

(Introducción) Si S_1 y S_2 son verdaderos, también lo es $S_1 \& S_2$.

(Eliminación) $S_1 \& S_2$ es verdadero sólo si S_1 y S_2 son ambos verdaderos.

En conjunto, las reglas dicen que $S_1 \& S_2$ es verdadero si y sólo si S_1 y S_2 son ambos verdaderos, que es exactamente lo mismo que dice la tabla de verdad de la conjunción.

II. ¿Qué es una tabla de verdad?

Fundamentalmente, una tabla de verdad es un dispositivo para demostrar ciertas propiedades lógicas y semánticas de enunciados del lenguaje natural o de fórmulas del lenguaje del cálculo proposicional:

1. ¿Son tautológicas, contradictorias o contingentes
2. Cuáles son sus condiciones de verdad
- 3.Cuál es su rol inferencial, es decir, cuáles son sus conclusiones lógicas y de qué otras proposiciones se siguen lógicamente

¹¹. En palabras de Jaroslav Peregrin, que “los significados que comúnmente adscribimos a las expresiones [puedan] construirse como roles inferenciales disfrazados” o “encapsulados.” (2003).

¹². Las teorías representacionales, por lo tanto, requieren una especificación del tipo relevante de circunstancias en las que se evalúan las condiciones de verdad de un enunciado.

El procedimiento para construir una tabla de verdad es sencillo y relativamente mecánico; en esta plática, asumiré que todos saben ya cómo hacer una tabla de verdad para cualquier fórmula del cálculo proposicional clásico. Para aplicar el método de tablas de verdad a un enunciado o proposición, por lo tanto, es necesario primero simbolizarlo, es decir, determinar qué fórmula del lenguaje proposicional muestra su forma lógica y, luego, elaborar la tabla de verdad de dicha fórmula. A este proceso le dedicaré mi segunda plática, del 29 de Abril.

Si al aplicar el método de tablas de verdad encontramos que una fórmula es tautológica, presumimos que ella es una verdad lógica del cálculo proposicional es decir que es lógicamente válida, lógicamente verdadera o verdadera con necesidad lógica. Por lo tanto, el uso de las tablas de verdad como métodos para demostrar que algo es lógicamente necesario presupone ciertas tesis sobre la verdad y la necesidad lógicas. Cada uno de los pasos y cada una de las características de las tablas de verdad representa una tesis lógica sustancial.

Tomemos por ejemplo, el popular principio de que toda tabla tiene 2^n renglones, donde la n corresponde al número de variables proposicionales (también conocidas como “letras proposicionales”) que aparecen en la fórmula. Una fórmula de 3 variables proposicionales, por ejemplo, tendría $2^3=8$ renglones. Pero ¿por qué es esto? La respuesta más directa es que éste es el número de combinaciones que existen de asignaciones de valores de verdad a cada una de las variables. En otras palabras, porque si asignamos a cada variable uno de los dos valores de verdad – verdadero o falso –, las posibles combinaciones son exactamente ocho, ni más, ni menos. Si bien es una verdad matemática indudable que la combinatoria de dos valores a n número de variables es 2^n , para que este principio valga como principio lógico dentro de una demostración lógica – que, a fin de cuentas es lo que una tabla de verdad es –, es necesario que ciertas cosas sean verdaderas:

Por ejemplo, entre otras cosas, es necesario que para determinar que una fórmula sea tautológica baste tomar en cuenta sólo cuál es el posible valor de verdad que tome la interpretación de sus variables proposicionales. También es necesario que se requieran considerar todas las posibles interpretaciones de las variables. Además, es necesario que a cada asignación de valores a las variables les corresponda uno y sólo un renglón. También es necesario que los valores de verdad sean dos – verdadero o falso. Si los valores de verdad fueran más, o fueran menos, las combinaciones posibles serían otras: más renglones si son más valores, y menos renglones si fueran menos valores. Además, el número de renglones a considerar también cambiaría si en cada renglón cada variable proposicional pudiera tener, no un sólo valor determinado, sino dos (o más) o ninguno. En esta plática veremos brevemente no solamente qué sucede cuando algunas de estas cosas cambian, sino que también veremos qué razones tendríamos para pensar que deberíamos cambiarlas.

El primer principio que pondremos en cuestión es precisamente el principio de que la interpretación de toda variable proposicional no puede tener sino uno de los dos valores de verdad: verdadero y falso. A este principio se le conoce comúnmente como bivalencia y junto con el principio de no-contradicción ha sido considerado uno de los principios lógicos básicos. Se le llama también un principio semántico porque tiene que ver con la interpretación de los símbolos, es decir, con su significado. Sin embargo, no tiene que ver con ninguna interpretación o significado particular, sino con cualquier interpretación posible. Por eso es que sigue siendo un principio lógico y formal.

Pues bien, para poder entender el principio, por lo tanto, debemos entender también cómo se interpretan las variables proposicionales.

2.2. ¿Qué es interpretar?



Alfred Tarski

“Interpretar” significa asignar significados. En este sentido, es más o menos el proceso inverso a la simbolización o formalización que aprendemos en nuestros cursos básicos de lógica. En ellos aprendemos a traducir enunciados en fórmulas, es decir, a pasar del lenguaje ordinario y natural al lenguaje artificial de las fórmulas lógicas. Ahora bien, la interpretación es dar el paso inverso: asignar a cada fórmula una proposición.

Como su nombre lo indica, las variables proposicionales se interpretan por proposiciones. Interpretar una variable de este tipo es asignarle una proposición. Si recuerdan, a cada enunciado declarativo simple (es decir, que no está compuesto por otros enunciados, aunque él mismo sí sea parte de otros enunciados complejos) lo simbolizamos por una variable proposicional de tal manera que si dos enunciados significaban lo mismo, es decir, si significan la misma proposición, los simbolizábamos con la misma variable, esto es, con la misma letra. Así, cada variable proposicional simbolizaba una proposición.

En consecuencia, cuando hablamos de las posibles interpretaciones de las variables proposicionales no hacemos sino hablar de las posibles proposiciones que se pueden simbolizar por variable de este tipo, es decir, todas. De tal manera que cuando decimos que todas las posibles interpretaciones de las variables proposicionales no pueden ser sino verdaderas o falsas – que es lo que dice el principio de bivalencia – lo que estamos diciendo es que todas las proposiciones no pueden ser sino verdaderas o falsas.

El principio de bivalencia ha sido tomado tradicionalmente como un principio lógico fundamental: toda proposición es verdadera o falsa. Si no es verdadera, es falsa y si no es falsa, es verdadera. No hay tercera opción. Por eso se le conoce también como principio del tercer excluso. La carga de la prueba descansa sobre quién defienda la tesis de que el principio es falso, es decir que existen más valores además de los dos tradicionales. Quién quiera defender la existencia de un tercer valor de verdad (o de otros más) tendría que mostrar:

1. Cuál sería ese tercer valor
2. En qué sentido es un valor de verdad
3. A qué (tipo de) proposiciones se le aplicaría, i.e., mostrar ejemplos de proposiciones que claramente no sean verdaderos ni falsos.
4. Cómo se comportarían lógicamente dichas proposiciones. Cómo interactuarían con otras proposiciones. es decir, cuál es su lógica. En particular, cómo afectaría la introducción de este nuevo valor nuestras tablas de verdad.

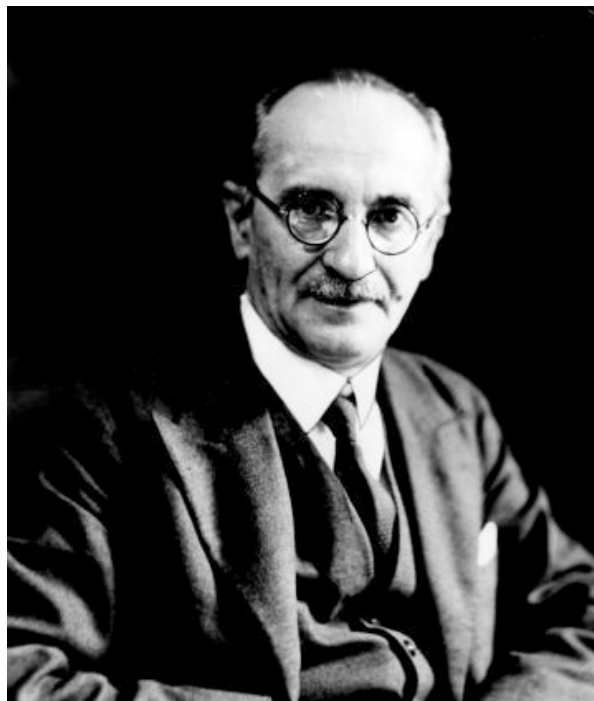
Como ejemplo, quieor hablar un poco de la primera lógica multivaluada, la cual toma como ejemplos paradigmáticos de enunciados que expresan proposiciones que no son verdaderas ni falsas a los futuros contingentes, es decir enunciados que refieren a hechos futuros que no son necesarios, sino que pueden darse o no de manera contingente. El ejemplo clásico, que le debemos a Aristóteles, es:

(A) “Mañana habrá una batalla naval”

Según defensores de un tercer valor de verdad, como Jan Lukazewicz – los que de ahora en adelante llamaremos “trivalentistas” –, si bien es cierto que, o bien mañana habrá una batalla naval o bien no la habrá, de ello no se sigue que la proposición que expresa el enunciado (A) sea verdadera o falsa. Si mañana hay una batalla naval, la proposición será verdadera y si no la hay, será falsa. Sin embargo, de

ello solamente se sigue que mañana la proposición será verdadera o falsa. Pero esto no nos dice nada sobre hoy. Mas bien parece que hoy la proposición no es todavía ni verdadera ni falsa. Para que sea verdadera es necesario que mañana haya una batalla naval. Para que sea falso, es necesario que mañana no haya una batalla naval. Hasta mañana, no se cumplirán ninguna de las condiciones. La proposición, por lo tanto, por ahora carece de cualquiera de esos valores de verdad hoy. Ya mañana tendrá alguno. Recientemente, John MacFarlane ha desarrollado un nuevo argumento contra la bivalencia de los futuros contingentes. Según él, cuando mañana diga “Lo que dijiste ayer (es decir, que habría una batalla naval) es cierto” no estaré diciendo que la proposición era verdadera ayer, sino que eso que dijiste ayer es verdadero hoy.

III. Tablas de verdad trivalentes



Jan Łukasiewicz

Recordemos que nuestras tablas de verdad tradicionales pueden describirse si permitimos dejar vacías casillas en las que el valor de verdad de la fórmula atómica es irrelevante, por ejemplo, podemos describir así la tabla de la disyunción:

P	Q	$P \vee Q$
V		V
	V	V
F	F	F

Las primeras dos líneas señalan que no importa cuál sea el valor de verdad de uno de los disyuntos, siempre que el otro sea verdadero, la disyunción será verdadera. De la misma manera, podríamos abreviar la tabla de la conjunción de la siguiente manera:

P	Q	$P \& Q$
V	V	V
	F	F
F		F

Las últimas dos líneas señalan que no importa cuál sea el valor de verdad de uno de los disyuntos, siempre que el otro sea falso, la conjunción será falsa.

La ventaja de este tipo de tablas para nuestros propósitos es que permiten extenderse de manera muy natural para permitir un tercer valor de verdad que no sea ni verdadera ni falso. Llamémosle “I” por “indeterminado”. Ahora podemos usar nuestra tabla abreviada de la disyunción clásica para desarrollar una tabla de verdad (no abreviada) para la disyunción trivalente.

Primer paso: identificar las diferentes nueve posibilidades de combinaciones para dos variables:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	
V	I	
V	F	
I	V	
I	I	
I	F	
F	V	
F	I	
F	F	

Segundo paso: Usamos las primeras dos líneas de la tabla abreviada para determinar el valor de verdad de los renglones con por lo menos un argumento verdadero:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	I	V
V	F	V
I	V	V
I	I	
I	F	
F	V	V
F	I	
F	F	

Tercer paso: Cómo la última línea de la tabla abreviada es también la última línea de la nueva tabla, le corresponde el mismo valor de verdad: falso.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	I	V
V	F	V
I	V	V
I	I	
I	F	
F	V	V
F	I	
F	F	F

Cuarto paso: Finalmente, cómo ya tenemos los renglones que son verdaderos o falsos según la tabla original, los renglones que aún no tienen valor de verdad, dado que no son ni verdaderos (sino hubieran quedado como tales en el segundo paso) ni falsos (ya que tampoco quedaron así en el tercer paso), deben ser indeterminados!

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	I	V
V	F	V
I	V	V
I	I	I
I	F	I
F	V	V
F	I	I
F	F	F

En algunos casos, esta tabla de verdad aparece, no en tres columnas, sino en un cuadro así:

v	V	I	F
V	V	V	V
I	V	I	I
F	V	I	F

Lo cual tiene la ventaja de dejar más claro el patrón que emerge de la tabla.

Si seguimos los mismos pasos para la conjunción, obtenemos las siguiente tablas:

P	Q	$P \& Q$
V	V	V
V	I	I
V	F	F
I	V	I

I	I	I
I	F	F
F	V	F
F	I	F
F	F	F

&	V	I	F
V	V	I	F
I	I	I	F
F	F	F	F

Si comparamos las dos tablas cuadradas, podemos ver la simetría entre la conjunción y la disyunción.

¡Así, ya tenemos tablas de verdad con más de 2^n renglones! Además, una vez que entendemos qué sucede cuándo se introduce un nuevo valor de verdad, podemos imaginar cómo serían lógicas de cuatro o más valores de verdad. Es más, como Lukaciewicz y Boole mostraron ya hace más de un siglo, podemos fácilmente hablar de lógicas con un infinito de valores de verdad.

IV. TABLAS DE VERDAD INTENSIONALES E INDEPENDENCIA LÓGICA



Rudolf Carnap

En clases básicas de lógica solemos aprender que una tabla de verdad tiene siempre 2^n renglones, dónde n es el número de ocurrencias de operadores lógicos en la fórmula o argumento que se esté simbolizando. Lo que comúnmente no se nos enseña es que, como bien señaló Wittgenstein ya en su *Tractatus Logico-Philosophicus* para que esto sea verdad, las variables deber simbolizar proposiciones

atómicas o, por lo menos, lógicamente independientes entre sí (es decir, cada proposición simbolizada debe ser lógicamente independiente de las demás).

Para verificar que efectivamente estamos tratando con dos proposiciones independientes, A y B, es necesario que estas satisfagan cuatro condiciones:

1. A no debe seguirse de B, es decir, debe ser posible que A sea verdadero y B falso
2. Y vice versa, B no debe seguirse de A, es decir, debe ser posible que B sea verdadero y A falso
3. La verdad de A debe ser compatible con la verdad de B, debe ser posible que tanto A como B sean ambos verdaderos al mismo tiempo, es decir, en la misma circunstancia.
4. La falsedad de A debe ser compatible con la de B, debe ser posible que tanto A como B sean ambos falsos al mismo tiempo, es decir, en la misma circunstancia.

Cuando sólo tenemos una proposición, ésta no debe ser necesariamente verdadera ni necesariamente falsa.

Si no se cumplen alguna de estas condiciones, entonces alguna de los renglones posibles de la tabla representara como posible un caso que no es realmente posible. Si A se sigue lógicamente de B, por ejemplo, entonces ya no es posible que A sea verdadera y B falsa. Por ello, el renglón que le asigna verdadero a A y falso a B no representa una posibilidad real. Es necesario, por lo tanto, eliminarlo de la tabla.

El que una fórmula sea tautológica, contradictoria o contingente, depende por supuesto, de cuales son los renglones de la tabla en la que se evalua. La misma fórmula puede ser contingente en una tabla, contradictoria en otra y tautológica en otra más, dependiendo de qué renglones tenga la tabla en cuestión. Hay formulas que siempre serán tautológicas o contradictorias, no importa en qué tablas las evaluemos. Estas son las tautologías y contradicciones que ya conocemos de nuestro cálculo proposicional. En otras palabras, si una fórmula es tautológica en la tabla de verdad tradicional de 2^n renglones, entonces será tautológica en cualquier otra tabla de verdad. Si una formula es verdadera en todos los renglones, no importa qué renglones eliminamos, seguirá siendo verdadera en todos ellos. Lo mismo sucede con las formulas que resultan contradictorias en las tablas de 2^n renglones: también son contradictorias en cualquier otra tabla. Por el contrario, si una fórmula es contingente en la tabla de 2^n renglones, entonces dependerá de qué renglones se incluyan o eliminen de la tabla para que sea contradictoria, tautológica o contingente.

Supongamos que queremos hacer la tabla de verdad del siguiente enunciado:

- (2) Si tu hermano no hace el examen, no lo pasará.

Identificamos las proposiciones atómicas y les asignamos una variable:

P: Tu hermano hace el examen.

Q: Tu hermano pasará el examen.

De esta manera, podemos formalizar (2) como $(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$ y construir su tabla de la siguiente manera:

P	Q	$(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Sin embargo, hay algo extraño en el análisis que presenta esta tabla, ya que nos dice, entre otras cosas, que el enunciado sería falso si P fuera falso y Q verdadero, es decir, si tu hermano no hiciera el exámen y, sin embargo, lo pasará, ¡lo cual es imposible! Por eso es que pareciera que este renglón no debería de aparecer en la tabla, ya que no es una posibilidad sino una imposibilidad. Así pues, la tabla de verdad correcta debería ser algo así cómo:

P	Q	$(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$
V	V	V
V	F	V
F	F	V

Y ahora sí podemos ver que, en realidad, ¡el enunciado expresaba una tautología! Desde esta perspectiva, por lo tanto, las fórmulas no son tautológicas, contradictorias o contingentes en sí mismas, sino en una tabla, y qué tabla sea la adecuada para evaluar una formula no va a depender de la fórmula misma, sino de su interpretación, es decir, de qué proposiciones simboliza cada variable proposicional. Por ello, mucha gente dice que este tipo de tablas no respetan el principio según el cual las propiedades lógicas de una proposición, en particular si una proposición es tautológica o no, debe depender sólo de su forma, no de su interpretación particular.

La área de la lógica que estudia las propiedades y relaciones lógicas expresadas en este tipo de tablas se le llaman lógicas intensionales, y el trabajo fundamental se lo debemos a Rudolf Carnap.

V. OTRAS TABLAS DE VERDAD DIVERGENTES

Además de las tablas polivalentes e intensionales, hay muchas otras tablas de verdad *raras*, de las cuales no hablaré aquí, pero no quiero dejar de mencionar. Por ejemplo, hay tablas de verdad en las que los renglones se bifurcan en dos o más sub-renglones y son útiles para lo que en lógica llamamos *super-valuaciones*. También existen tablas con n valores y más de $2n$ renglones, ¿cómo es posible? Pues porque, a diferencia de las tablas tradicionales, en estas tablas el orden de los renglones *sí* importa, de tal manera que renglones repetidos cuentan como renglones distintos. Finalmente, también existen las tablas *bidimensionales*, usadas originalmente en ciertas lógicas intensionales, pero popularizadas gracias al trabajo de Robert Stalnaker y otros. Como espero haya quedado claro, el campo es muy amplio y en esta plática apenas rocé su superficie.

Borrador de Marzo 2011
Comentarios bienvenidos
drxl@discoskonfort.com