Seminario de Posgrado

Teoremas de incompleción en la aritmética y la teoría de conjuntos.

Una introducción lógica y filosófica

Profesor: Mario Gómez Torrente; Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM; tel. 5622-7248; correo-e: <mariogt@unam.mx>.

Programa tentativo

1. Introducción y objetivos.

Este seminario ofrecerá, fundamentalmente, una introducción matemática elemental a los teoremas de incompleción de la aritmética de Gödel y al método de forzamiento para demostrar teoremas de independencia en la teoría de conjuntos, en particular el teorema de Cohen-Gödel de la independencia de la hipótesis del continuo. Pero los resultados matemáticos presentados se expondrán llamando la atención sobre algunas de sus conexiones con la cuestión filosófica de la objetividad de la verdad matemática, específicamente en la aritmética y la teoría de conjuntos.

Los objetivos principales son (1) que cada estudiante adquiera familiaridad con las nociones matemáticas que aparecen en las versiones presentadas de los teoremas de incompleción o independencia, (2) que sea capaz de probar con facilidad resultados elementales acerca de esas nociones, y (3) que adquiera una comprensión buena de la estructura y contenido de las pruebas de los teoremas presentados. Si bien una comprensión plena de todo el material del curso puede ser difícil salvo para estudiantes con un grado alto de madurez matemática, se buscará que el seminario pueda ser seguido con provecho también por estudiantes menos avanzadxs, en particular estudiantes no especializadxs en lógica o matemáticas. A tal efecto, se enfatizarán siempre las motivaciones intuitivas de las nociones y resultados presentados, y se dará una importancia relativamente menor a las partes más rutinarias y auxiliares de las pruebas (aunque sin sacrificar la completitud o el rigor para lxs estudiantes avanzadxs). Se dará valor especial, en el caso de estudiantes sin un grado elevado de madurez matemática, a la comprensión cualitativa de las motivaciones, la estructura y el contenido de los resultados.

2. Secuencia aproximada de temas.

1ª clase	Introducción general. Lenguajes para la aritmética elemental, en particular L_E. Sistemas formales. Numeraciones de Gödel.

2ª clase	La inexpresabilidad de la satisfacción. Un método para construir oraciones indecidibles. La sintaxis precisa de L_E. Una numeración de Gödel.
3ª clase	Relaciones Σ_0, Σ_1, Π_1 y Σ. Su relación con la noción de computabilidad. Toda relación Σ es Σ_1. La inexpresabilidad de la verdad y la existencia de puntos fijos para la verdad.
4ª clase	La Aritmética de Peano con Exponenciación (PE). Aritmetización de las secuencias finitas de expresiones. La expresabilidad de la demostrabilidad. La incompleción de PE.
5ª clase.	Construcción de oraciones indecidibles en PE. PE es completo-Σ_0. La versión original del primer teorema de incompleción de Gödel.
6ª clase.	El perfeccionamiento de Rosser. El segundo teorema de incompleción de Gödel: la idea básica. La formalización de la prueba del primer teorema. PE reconoce que es completo-Σ_1.
7ª clase.	Ideas básicas de teoría de conjuntos. El sistema ZFC. Ordinales. La jerarquía acumulativa. Recursión transfinita. Cardinales.
8ª clase.	Modelos de ZFC. Transitividad. Fórmulas absolutas. Principio de Reflexión. Teorema del colapso de Mostowski.
9ª clase.	Modelos base transitivos numerables y extensiones de éstos. Nociones y condiciones de forzamiento. Filtros máximos sobre nociones de forzamiento.
10ª clase.	Nombres-P y evaluaciones-G. Densidad. Conjuntos y extensiones genéricas. Relaciones de forzamiento.
11ª clase.	Caracterización de la verdad en una extensión genérica en términos de la relación de forzamiento.
12ª clase.	Forzamiento de Cohen. Preservación de cardinales. Extensiones genéricas modelos de ZFC+-CH y de ZFC+CH.
13ª clase.	La incompleción de Gödel y la cuestión de la objetividad de la verdad aritmética. El “teorema disyuntivo” informal de Gödel.
14ª clase.	La incompleción de Cohen y la cuestión de la objetividad de la verdad conjuntista. El estatus filosófico de la hipótesis del continuo.

3. Bibliografía.

Batzoglou, S. (2024), *Introduction to Incompleteness. From Gödel’s Theorems to Forcing and the Continuum Hypothesis*, Birkhäuser, Cham.

Boolos, G. (1993), *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, Cambridge.

Boolos, G., J. P. Burgess y R. Jeffrey (2007), *Computability and Logic*, 5ª edn., Cambridge University Press, Cambridge.

Burgess, J. P. (2022), *Set Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

Feferman, S. (2011), "Is the Continuum Hypothesis a Definite Mathematical Problem?", https://math.stanford.edu/~feferman/papers/IsCHdefinite.pdf

Franzén, T. (2005), *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, A K Peters, Wellesley (Mass.).

Hamkins, J. D. (2015), "Is the Dream Solution of the Continuum Hypothesis Attainable?", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 56,135–145.

Jech, T. (2003), *Set Theory: The Third Millennium Edition,* Springer, Berlín.

Kennedy, J. (2022), *Gödel's Incompleteness Theorems*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kunen, K. (2013), *Set Theory*, edn. rev., College Publications, Londres.

Rittberg, C. J. (2015), "How Woodin Changed his Mind: New Thoughts on the Continuum Hypothesis", *Archive for History of Exact Sciences* 69, 125–151.

Smith, P. (2013), *An Introduction to Gödel's Theorems*, 2ª edn., Cambridge University Press, Cambridge.

Smullyan, R. (1992), *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, Oxford.

Weaver, N. (2014), *Forcing for Mathematicians,* World Scientific, Singapur.

4. Organización y evaluación.

Las clases tendrán lugar los lunes de 10h a 14h en el aula 6 del Instituto de Investigaciones Filosóficas.

Una clase típica constará de explicaciones de nociones, pruebas de teoremas y comentarios filosóficos. Las explicaciones y demostraciones matemáticas de clase no requerirán el estudio de ningún texto en particular, salvo los apuntes y los papeles volantes distribuidos en clase. Sin embargo, la consulta de la bibliografía y de otros textos puede ser de ayuda.

Con una periodicidad aproximada de tres semanas, cada estudiante habrá de contestar a un cuestionario de ejercicios sobre las clases anteriores, con valor de 10 puntos. En general, los ejercicios consistirán en hacer demostraciones y computaciones elementales, y en responder preguntas de comprensión cualitativa sobre las nociones y resultados presentados en clase. La calificación final se basará en la media aritmética de las calificaciones de las respuestas a los cuestionarios.