

Teoremas de imposibilidad en los fundamentos de la cuántica

Elias Okon

Universidad Nacional Autónoma de México, CDMX, México.

La capacidad predictiva de la mecánica cuántica es prácticamente inigualable. Sin embargo, no hay claridad—y mucho menos consenso—sobre qué nos dice la teoría sobre la naturaleza del mundo. Esta gran pregunta ha generado apasionados debates a lo largo del tiempo; el problema es que, a menudo, dichos debates se han llevado a cabo con poco rigor y precisión conceptual. Los teoremas de imposibilidad en los fundamentos de la mecánica cuántica ofrecen un marco teórico sólido para abordar estas cuestiones de una manera más sistemática y objetiva. La finalidad de este manuscrito es examinar un conjunto selecto de estos resultados, compuesto por el argumento de EPR, el teorema de Bell, el teorema de Kochen-Specker, el trilema de Maudlin y el teorema PBR. El objetivo es proveer un esquema para explorar preguntas conceptuales en torno a la mecánica cuántica de manera más rigurosa y precisa.

1. Introducción

¿Qué nos dice la mecánica cuántica sobre la naturaleza del mundo? ¿Nos provee una representación completa del mismo? ¿Puede el mundo considerarse local? ¿Qué representa la función de onda: un elemento objetivo del mundo o nuestro conocimiento de este? ¿Tienen siempre valores bien definidos las propiedades físicas? ¿Es el mundo fundamentalmente determinista o indeterminista? Estas y otras preguntas relacionadas han sido objeto de intenso debate desde el nacimiento mismo de la teoría cuántica y en la actualidad continúan provocando acaloradas discusiones, particularmente en los pasillos de institutos y departamentos de física alrededor del mundo.

Sin embargo, y pese a su importancia conceptual, estas cuestiones con frecuencia se discuten con estándares de rigor lógico y precisión conceptual sorprendentemente bajos. En muchos casos, las discusiones quedan atrapadas en malentendidos, afirmaciones infundadas o intuiciones no argumentadas adecuadamente. En este contexto, los teoremas de imposibilidad juegan un papel crucial: nos permiten enmarcar estas preguntas de manera precisa y extraer consecuencias lógicas claras a partir de supuestos bien definidos.

En este manuscrito, me propongo examinar con detenimiento algunos de los teoremas más influyentes en este ámbito. Analizaremos el argumento EPR (Einstein et al., 1935) y el Teorema de Bell (Bell, 1964), que cuestionan la completitud y la localidad de la teoría cuántica; el Teorema de Kochen-Specker (Kochen and Specker, 1967), que muestra la imposibilidad

de asignar valores predeterminados de manera no contextual a las observables cuánticas; el trilema de Maudlin (Maudlin, 1995), que explora de manera sistemática el llamado problema de la medición y el Teorema PBR (Pusey et al., 2012), que explora las implicaciones ontológicas de distintas interpretaciones de la función de onda. A través de estos resultados, se busca ofrecer una visión clara y matizada sobre los fundamentos de la mecánica cuántica y las limitaciones que enfrentan diversas propuestas interpretativas. Sin embargo, antes de explorar estos importantes resultados, hablemos un poco sobre el formalismo de la mecánica cuántica.

2. Breve presentación de la mecánica cuántica

Antes de entrar de lleno en la revisión de los diferentes teoremas de imposibilidad, es importante presentar de manera explícita los postulados de lo que se conoce como la interpretación estándar de la mecánica cuántica.¹ De acuerdo con dicho formalismo, a todo sistema físico se le asigna un espacio de Hilbert² y los posibles estados instantáneos del sistema se asocian con vectores de longitud uno en dicho espacio.³ Las propiedades físicas se representan por medio de operadores hermitianos⁴ y la relación entre dichos operadores y los valores de las propiedades está dada por lo que se conoce como la *regla eigenvalor/eigenvector* (E/E) que dice lo siguiente:⁵

Un estado posee el valor α de una propiedad representada por el operador O si y sólo si ese estado es un eigenvector de O con eigenvalor α .

La regla E/E implica que existen estados cuánticos (y, por lo tanto, situaciones físicas) que son tales que no tienen bien definido el valor para cierta propiedad. De hecho, para todo estado, existen propiedades para las cuales este es el caso.

La dinámica de la teoría esta gobernada por la *ecuación de Schrödinger*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle, \quad (1)$$

donde $|\psi\rangle$ es el vector estado o estado cuántico, $\hbar$ la constante de Planck reducida y $\hat{H}$ el operador Hamiltoniano que representa la energía total del sistema. Esta es una ecuación

¹Los formalismos expuestos en Dirac (1930) y von Newmann (1932), junto con la mayoría de las presentaciones en libros de texto, constituyen excelentes representantes de dicho formalismo.

²Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con producto interno que es completo con respecto a la distancia inducida por el producto interno.

³Vectores de longitud uno que difieren solo por una fase se asocian con el mismo estado físico.

⁴Los operadores hermitianos son operadores lineales, auto-adjuntos con respecto al producto interno.

⁵Los eigenvectores de un operador O son los vectores diferentes de cero que cumplen: $O|A\rangle = \alpha|A\rangle$; α es el eigenvalor correspondiente.

lineal y determinista que, dado el estado del sistema en un tiempo dado, permite calcular el estado del sistema en cualquier otro tiempo.

La conexión entre el formalismo matemático y los experimentos está dada por la *regla de Born* de la siguiente manera. Supongamos que el estado del sistema está representado por el vector $|\psi\rangle$ y que estamos interesados en medir una propiedad representada por el operador B . Entonces, el formalismo cuántico, a través de la regla de Born, proporciona la lista de posibles resultados—compuesta por los eigenvalores del operador en cuestión—y las probabilidades correspondientes, que están dadas por

$$P(b_i|\psi) = |\langle\psi|b_i\rangle|^2 \quad (2)$$

donde $B|b_i\rangle = b_i|b_i\rangle$ y $\langle\psi|b_i\rangle$ es el producto interno entre los vectores $|\psi\rangle$ y $|b_i\rangle$. Nótese que si el estado inicial es un eigenestado de la propiedad que se va a medir, la regla de Born predice con certeza que el resultado coincidirá con el valor preexistente.⁶

El último principio del formalismo se conoce como el *postulado de colapso*. Este sostiene que, cuando se realiza una medición de B sobre el estado $|\psi\rangle$, y el resultado es b_i , entonces el estado del sistema salta instantáneamente al eigenestado con dicho eigenvalor

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{colapso}} |b_i\rangle. \quad (3)$$

Esta es una evolución que, a diferencia de la de Schrödinger, es discontinua, indeterminista y no lineal. El postulado del colapso es necesario para hacer compatible la regla de Born con la regla E/E, pues esta última demanda que si el valor de alguna propiedad está definido, entonces el estado debe ser el eigenvector correspondiente, justo lo que implica el postulado del colapso. Una consecuencia importante del postulado del colapso, junto con la regla de Born, es que, en general, las mediciones en mecánica cuántica no simplemente revelan valores preexistentes a la medición, sino que modifican el sistema y muestran el valor resultante.

La mecánica cuántica también postula la existencia de *sistemas enredados* que, a pesar de estar compuestos por diferentes componentes—posiblemente muy alejadas entre sí—actúan, en cierto sentido, como si fueran un solo ente. En concreto, de acuerdo con la regla E/E, cada elemento de un sistema enredado, por separado, no posee propiedades bien definidas—solo el sistema completo las posee. Por ejemplo, el llamado *singulete* es un estado de dos partículas de espín $1/2$,⁷ tal que cada una de las partículas no posee bien definido el valor del espín

⁶Esto debido a la ortogonalidad de los eigenvectores de un operador Hermitiano con eigenvalores diferentes.

⁷El espín es un tipo de momento angular intrínseco que poseen las partículas cuánticas; es un fenómeno puramente cuántico sin contraparte clásica. Las partículas con espín $1/2$ son tales que el resultado de una medición de espín a lo largo de cualquier dirección tienen solo dos posibles resultados, comúnmente denominados espín “arriba” y espín “abajo”.

en ninguna dirección, pero donde el valor del espín total del par en cualquier dirección es cero. Más aún, si medimos el espín de una de las partículas en alguna dirección, obtendremos un resultado bien definido; y dado que el espín total es cero, la medición induce un cambio en el estado de la partícula no medida, garantizando una anticorrelación perfecta en los resultados. Es decir, la medición sobre un elemento de un par enredado modifica el estado del otro elemento, a pesar de que este último puede estar tan lejos del primero como se quiera.

Con todo esto en mente, revisemos algunos de los resultados más influyentes en los fundamentos de la cuántica

3. EPR

En 1935, Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) publicaron un famoso artículo titulado “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?” (¿Puede considerarse completa la descripción mecánico-cuántica de la realidad física?). Como su título sugiere, el objetivo del artículo es investigar si la mecánica cuántica puede considerarse una teoría completa. Para explorar el asunto, el artículo comienza enunciando el siguiente criterio de completitud para una teoría:

Com: Una teoría es completa si todo elemento de realidad contiene una contraparte en la teoría.

Es decir, una teoría será considerada completa si a todo *elemento de realidad* le corresponde un componente o representante teórico. Pero, ¿qué son esos elementos de realidad y como podemos encontrarlos? EPR propone la siguiente condición suficiente:

ER: Si, sin perturbar un sistema, podemos predecir con certeza el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de realidad correspondiente a dicha cantidad física.

La idea es que, si de alguna manera podemos predecir consistentemente, con certeza, el valor de cierta cantidad física, entonces dicha propiedad debe existir de manera objetiva e independiente del observador.

A partir de estos criterios, EPR construye un argumento que intenta mostrar que la mecánica cuántica no satisface Com. El razonamiento original incluye ciertos elementos innecesariamente complicados, que desvían la atención del punto central. Por ello, en vez de analizar directamente ese argumento, recurriremos a una versión simplificada que permite resaltar con claridad la enseñanza fundamental del artículo.

El punto de partida es un singulete, con el par de partículas involucradas, enviadas por separado a regiones distantes 1 y 2. Supongamos ahora que se mide el espín en dirección z de la partícula en 1 y el resultado es espín arriba. En consecuencia, se puede predecir con certeza el espín a lo largo de z de la partícula en 2 pues, dado que el singulete implica que el espín total es cero, se asegura una anticorrelación perfecta en los resultados. Parece, entonces, que se puede utilizar ER para afirmar que existe un elemento de realidad asociado con el espín de la partícula no medida. Sin embargo, es importante recordar que ER contiene la cláusula “sin perturbar un sistema”, y no es claro si se cumple o no en este escenario. Es aquí donde EPR utiliza un principio que juega un papel crucial en el argumento, el principio de localidad:

Loc: Si dos sistemas se encuentran suficientemente alejados, entonces acciones sobre uno no pueden tener ningún efecto sobre el otro.

Ahora sí, asumiendo Loc, podemos concluir que la medición sobre una de las partículas no puede modificar el estado de la otra, así que se satisface la cláusula arriba mencionada. Por lo tanto, dado Loc, podemos afirmar que existe un elemento de realidad con respecto al espín de la partícula no medida. Sin embargo, de acuerdo con la mecánica cuántica, al ser el estado un singulete, dicha partícula no tiene un espín bien definido, así que la teoría no tiene una contraparte para el elemento de realidad en cuestión. De todo esto, junto con Com, concluimos que la mecánica cuántica no es completa; este es el argumento de EPR. Es muy importante recordar, sin embargo, que dicha conclusión depende de asumir Loc. Esto es, para la mecánica cuántica:

$$\text{Loc} \Rightarrow \neg\text{Com},$$

(con $\Rightarrow$ denotando implicación y $\neg$ negación) lo cual es lógicamente equivalente a

$$\text{Com} \Rightarrow \neg\text{Loc}.$$

Por lo tanto, EPR muestra que si el mundo es local, entonces la mecánica cuántica no puede ser completa, lo cual es equivalente a que, si la mecánica cuántica es completa, entonces el mundo no puede ser local.

4. Teorema de Bell

En un artículo de 1964, titulado “On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox”, y en trabajos posteriores (e.g., Bell (1976, 1990)), Bell mostró que, para ciertos experimentos, toda teoría local hace predicciones distintas a las de la mecánica cuántica. El punto de partida del trabajo

de Bell es el resultado de EPR descrito arriba. Dado que EPR muestra que la suposición de completos de la mecánica cuántica implica no-localidad, Bell se hace la siguiente pregunta: ¿es posible restaurar la localidad completando la mecánica cuántica? Su teorema da una respuesta negativa a esta pregunta.

Con el fin de formalizar la intuición detrás de lo que arriba llamamos el principio Loc, guiado por la intuición relativista de que las causas de cualquier evento deben estar contenidas dentro de su cono pasado de luz⁸ (“nada puede viajar más rápido que la luz”), Bell introduce el *principio de localidad causal* (PLC). De acuerdo con este, un modelo es considerado *local* si la probabilidad que le asigna a q_χ , el valor de alguna cantidad física en el evento espaciotemporal χ , es tal que

$$P(q_\chi|\lambda_\sigma) = P(q_\chi|\lambda_\sigma, q_\xi), \quad (4)$$

con λ_σ una especificación completa del estado físico en σ , una rebanada espacial del cono pasado de luz de χ , y q_ξ el valor de cualquier cantidad física en ξ , un evento con separación tipo espacio⁹ de χ y fuera del cono futuro de luz¹⁰ de σ (ver la Figura 1). En palabras, las

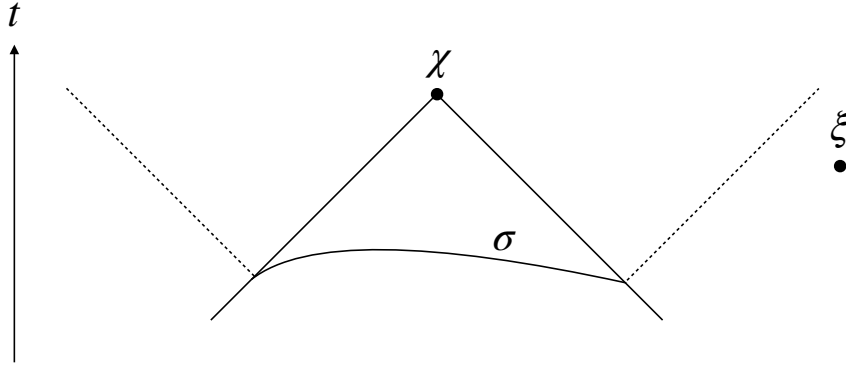


Figura 1: Diagrama espaciotemporal del escenario planteado en el PLC, en el que las trayectorias de la luz se representa con líneas a 45°.

predicciones que hace un modelo local para un evento, dada información completa sobre una rebanada de su cono de luz pasado, no cambian con información adicional sobre regiones fuera del futuro de dicha rebanada. Es decir, en un mundo local, todas las causas de un

⁸El cono pasado de luz de un evento está constituido por todos los puntos desde donde se puede enviar un pulso de luz hacia dicho evento.

⁹Dos eventos tienen separación tipo espacio si no es posible llegar de uno a otro viajando a una velocidad igual o menor a la de la luz.

¹⁰El cono futuro de luz de un evento está constituido por todos los puntos que pueden ser alcanzados lanzando un pulso de luz desde dicho evento.

evento están contenidas en su pasado causal.

Con esta formalización de la noción de localidad, el trabajo de Bell puede describirse de la siguiente manera. Consideremos un conjunto de pares de partículas en el estado singulete. Las partículas de cada par se envían a dos regiones espacialmente separadas, 1 y 2, donde se realizan mediciones de espín, pero, a diferencia de EPR, permitimos que las mediciones en 1 y 2 no sean a lo largo de la misma dirección, sino a lo largo de direcciones elegidas de cada lado de manera independiente y aleatoria. Denotamos con a, b las direcciones de espín medidas en 1 y 2, respectivamente, y con A, B los resultados correspondientes (con espín arriba correspondiente a $+1$ y espín abajo a -1). A continuación, junto con Bell, denotamos por λ el estado completo de cada par. Si la mecánica cuántica es completa, entonces λ vendría dado por el estado cuántico; si la mecánica cuántica no es completa, entonces λ podría ser el estado cuántico, complementado con variables adicionales o podría ser algo completamente diferente. En cualquier caso, no imponemos determinismo en los modelos considerados. Es decir, permitimos que λ no necesariamente determine los resultados, sino únicamente las probabilidades de estos.

Dado que estamos interesados en explorar la viabilidad de los modelos locales, asumimos que los modelos en consideración satisfacen el PLC. El siguiente paso, por lo tanto, es revisar las consecuencias de dicho principio, en el contexto del experimento propuesto por Bell. Para esto, consideramos la probabilidad conjunta $P(A, B|a, b, \lambda)$ y usamos la regla del producto para escribir

$$P(A, B|a, b, \lambda) = P(A|a, b, B, \lambda)P(B|a, b, \lambda). \quad (5)$$

Utilizando el PLC notamos que

$$P(A|a, b, B, \lambda) = P(A|a, \lambda) \quad \text{y} \quad P(B|a, b, \lambda) = P(B|b, \lambda), \quad (6)$$

de donde se sigue que

$$P(A, B|a, b, \lambda) = P(A|a, \lambda)P(B|b, \lambda). \quad (7)$$

Esta condición, usualmente denominada *factorizabilidad* (F), captura la idea de que, para las teorías locales, todas las correlaciones entre sistemas distantes deben tener explicaciones locales. Es decir, una vez que se condiciona sobre el estado λ , las correlaciones entre mediciones distantes desaparecen por completo.

Ahora bien, dado que Bell considera mediciones sobre un conjunto de pares, dicho conjunto puede caracterizarse por una distribución sobre los estados fundamentales, $\rho(\lambda)$. La idea es que, aunque todos los pares se preparan en el estado singulete, la descripción completa, dada por λ , puede variar de un par a otro. Bell asume que los valores de λ y los parámetros

a y b son estadísticamente independientes, es decir

$$\rho(\lambda|a, b) = \rho(\lambda). \quad (8)$$

A esta condición la llamamos *independencia de ajustes* (IA) e implica que los parámetros a, b y λ no están correlacionados. IA es sumamente razonable ya que es posible diseñar experimentos tipo Bell donde a y b se elijen antes, durante o después de la generación del par, y mediante métodos extremadamente diversos y sofisticados. Además, una suposición análoga se acepta (implícitamente) en todos los escenarios experimentales de todas las ciencias.

Ahora sí, para construir el teorema, Bell muestra que, para cualquier modelo que satisfaga F e IA, el valor esperado del producto AB , sobre todo el conjunto de pares,

$$E(a, b) = \int \sum_{A, B} A B P(A, B|a, b, \lambda) \rho(\lambda|a, b) d\lambda, \quad (9)$$

necesariamente satisface

$$|E(a, b) + E(a, b')| + |E(a', b) - E(a', b')| \leq 2. \quad (10)$$

Es decir, las predicciones de todos los modelos que satisfacen F e IA necesariamente satisfacen esta desigualdad.

Para probar esto, usando las suposiciones F e IA de las Ecs. (7) y (8), escribimos la Ec. (9) como

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \int \sum_{A, B} A B P(A|a, \lambda) P(B|b, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int \left[\sum_A A P(A|a, \lambda) \right] \left[\sum_B B P(B|b, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int \bar{A}(a, \lambda) \bar{B}(b, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (11)$$

con $\bar{A}(a, \lambda)$ y $\bar{B}(b, \lambda)$ las expresiones en los corchetes cuadrados de la segunda línea. A continuación consideramos

$$E(a, b) + E(a, b') = \int \bar{A}(a, \lambda) [\bar{B}(b, \lambda) + \bar{B}(b', \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \quad (12)$$

y dado que $|\bar{A}(a, \lambda)| \leq 1$,

$$|E(a, b) + E(a, b')| \leq \int |\bar{B}(b, \lambda) + \bar{B}(b', \lambda)| \rho(\lambda) d\lambda, \quad (13)$$

y por el mismo razonamiento,

$$|E(a', b) - E(a', b')| \leq \int |\bar{B}(b, \lambda) - \bar{B}(b', \lambda)| \rho(\lambda) d\lambda. \quad (14)$$

Finalmente, dado que $|\bar{B}(b, \lambda)| \leq 1$,

$$|\bar{B}(b, \lambda) + \bar{B}(b', \lambda)| + |\bar{B}(b, \lambda) - \bar{B}(b', \lambda)| \leq 2, \quad (15)$$

así que, sumando las Ecs. (13) y (14), y recordando que $\rho(\lambda)$ está normalizado, llegamos a¹¹

$$|E(a, b) + E(a, b')| + |E(a', b) - E(a', b')| \leq 2. \quad (16)$$

En un último paso, Bell considera la predicción cuántica para el valor esperado del producto AB , dada por

$$E^{MC}(a, b) = -\cos(\theta), \quad (17)$$

con θ el ángulo entre a y b . Además, nota que, si se toma a, a', b, b' en el mismo plano, con un ángulo de 90° entre a y a' , y b y b' , y un ángulo de 45° entre a y b , entonces

$$|E^{MC}(a, b) + E^{MC}(a, b')| + |E^{MC}(a', b) - E^{MC}(a', b')| = 2\sqrt{2}. \quad (18)$$

Está claro, entonces, que la mecánica cuántica y los modelos que satisfacen F (e IA) hacen predicciones diferentes para el experimento en cuestión.

El paso final es considerar las realizaciones experimentales del escenario de Bell. A lo largo de los años, comenzando con Aspect et al. (1981, 1982), dichos experimentos se han realizado y refinado, estableciendo claras violaciones de la desigualdad. Parece, entonces, que los modelos que satisfacen F (e IA) no pueden describir correctamente nuestro mundo. Es decir, el mundo parece contener aspectos no-locales.

5. Teorema de Kochen-Specker

Como vimos arriba, de acuerdo con la interpretación estándar de la mecánica cuántica, las propiedades no siempre tienen valores bien definidos. Sin embargo, al medir cualquier propiedad, esta invariablemente adquiere un valor concreto. ¿Para qué suponer, entonces, que las propiedades pueden no tener valores?, ¿no sería más sencillo proponer que siempre los

¹¹Esta desigualdad particular—conocida como CHSH, ya que fue derivada en un artículo de Clauser, Horne, Shimony y Holt Clauser et al. (1969)—no es la que Bell derivó en su primera prueba. La derivación de la desigualdad original requiere de la suposición adicional de anticorrelaciones exactas para corridas donde $a = b$.

tienen y que, al medir, sólo descubrimos dichos valores? Esto nos lleva a la siguiente pregunta, ¿será posible construir una teoría de *variables ocultas*, donde todas las propiedades siempre tienen valores bien definidos y, al medir, simplemente leemos dichos valores? El teorema de Kochen-Specker da una respuesta negativa a esta pregunta. Sin embargo, como veremos, no cierra por completo la puerta a teorías de variables ocultas.

El punto de partida del teorema es suponer que, dado un sistema cuántico, una teoría de variables ocultas debe asignarle valores numéricos $v(L), v(M), v(N), \dots$ a todas las observables cuánticas $L, M, N, \dots$; y, si alguna observable, o algún conjunto mutuamente conmutativo de observables, es medido, los resultados serán dichos valores. Dado que la mecánica cuántica, y la evidencia empírica, demandan que los resultados de las mediciones deben coincidir con eigenvalores, solo eigenvalores de operadores son permitidos como valores definidos. Además, toda identidad funcional entre operadores que conmutan también se cumple en términos de los eigenvalores correspondientes, así que, si se realiza un experimento en el que se mide un conjunto de operadores que conmutan, los resultados deben satisfacer cualquier relación funcional válida a nivel de operadores. Es decir, los valores asignados deben ser tales que, para todo conjunto de operadores que conmutan $A, B, C, \dots$,

$$f(A, B, C, \dots) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(v(A), v(B), v(C), \dots) = 0. \quad (19)$$

¿Es posible construir una teoría con estas características? El teorema de Kochen-Specker muestra que no. En concreto, este muestra que, para todo espacio de Hilbert de dimensión ≥ 3 , la Eq. (19) es incompatible con que todas las observables cuánticas tengan valores definidos.

Para mostrar lo anterior, uno debe encontrar un conjunto de observables a los cuales es imposible asociarles valores, de forma que todas las relaciones funcionales entre aquellas observables que conmutan también sean satisfechas por los valores asignados. La demostración original del Kochen y Specker es técnicamente demandante, sin embargo, a lo largo de los años han aparecido pruebas alternativas, quizás con menor generalidad, pero mucho más sencillas. Este es el caso de la prueba de Mermin propuesta en Mermin (1993), válida únicamente para espacios de Hilbert de dimensión ≥ 4 , la cual revisamos a continuación.

Mermin comienza recordando que todo espacio de Hilbert de dimensión 4 puede pensarse en términos de dos partículas de espín 1/2 independientes, y las matrices de Pauli correspondientes.¹² Recordamos también que estas últimas satisfacen $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$ y tienen como eigenvalores 1 y -1.

¹²Las matrices de Pauli son un conjunto de 3 matrices Hermitianas 2x2 que representan el espín de las partículas 1/2 a lo largo de 3 direcciones ortogonales; forman, además, una base del espacio de observables de un espacio de Hilbert de dimensión 2.

A continuación, Mermin considera 9 observables, las cuales acomoda en la siguiente tabla 3x3:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x^1 & \sigma_x^2 & \sigma_x^1 \sigma_x^2 \\ \sigma_y^1 & \sigma_y^2 & \sigma_y^1 \sigma_y^2 \\ \sigma_x^1 \sigma_y^2 & \sigma_y^1 \sigma_x^2 & \sigma_z^1 \sigma_z^2 \end{array}$$

Para mostrar que no es posible asignar valores a estas 9 observables, de manera que todas las relaciones funcionales entre aquellas que conmutan también se satisfagan por los valores asignados, notamos lo siguiente:

1. Las observables en cada fila y en cada columna conmutan entre sí.
2. El producto de los 3 operadores en la columna de la derecha es -1, mientras el del resto de columnas y filas es 1.

Pero esto significa que, si queremos que los valores asignados a observables que conmutan, cumplan las identidades satisfechas por las observables, entonces: i) multiplicando las tres filas, el producto de los 9 valores debe ser igual a 1, pero, ii) multiplicando las tres columnas, el producto de los mismos 9 valores debe ser igual a -1. Claramente, esto es imposible. Concluimos, entonces, que es imposible asignar valores a estas 9 observables de manera que estos cumplan las relaciones satisfechas por las observables que conmutan.

¿Implica el teorema de Kochen-Specker el fin de las teorías de variables ocultas? No realmente. Las teorías de variables ocultas consideradas en el teorema demandan que a) toda observable cuántica tengo en todo momento un valor definido y b) el resultado de toda medición simplemente corresponda a la lectura del valor previamente poseído. Esto, en particular, significa que la medición de una observable debe dar el mismo resultado, independientemente del procedimiento utilizado para medirla o de qué otras mediciones se lleven a cabo al mismo tiempo. A esta suposición se le conoce como *no-contextualidad*. Sin embargo, es razonable pensar que los resultados de una medición pueden depender, no solo del estado del sistema medido, sino también de la disposición completa del aparato de medición y de qué otras observable se miden al mismo tiempo. Concluimos, entonces, que mientras el teorema de Kochen-Specker bloquea la construcción de teorías de variables ocultas no-contextuales, deja abierta la puerta para la formulación de modelos de variables ocultas contextuales.

6. Trilema de Maudlin

En la sección 2, señalamos que la mecánica cuántica estándar contempla dos dinámicas diferentes: la ecuación de Schrödinger, que es continua, determinista y lineal; y el postulado del colapso, que es discontinuo, indeterminista y no lineal. En particular, el formalismo estándar establece lo siguiente:

- En ausencia de mediciones, la evolución de los estados está regida por la ecuación de Schrödinger.
- Cuando ocurre una medición, la dinámica se describe mediante el postulado del colapso.

A pesar del gran éxito empírico de este formalismo, este esquema es altamente insatisfactorio desde el punto de vista conceptual. La dificultad radica en que esta distinción, indispensable para poder usar el formalismo para extraer predicciones, se apoya en la noción de *medición*, pero tal concepto no puede ser parte de lenguaje fundamental de la teoría. Esto es, conceptos emergentes o de un orden más alto, como medición, aparato de medición, observador o macroscópico, no pueden aparecer en el lenguaje básico de una teoría que aspira a ser fundamental. El resultado, es un esquema sin duda exitoso en situaciones experimentales controladas, pero irremediabilmente impreciso desde el punto de vista conceptual. A esto se le conoce como el problema de la medición en mecánica cuántica (véase, por ejemplo, Bell (1981), secciones 1-3, y Albert (1992), cap. 4).

En Maudlin (1995), el problema de la medición se enuncia de una manera más formal y general. Esta consiste en mostrar que las tres siguientes proposiciones son, en conjunto, incompatibles:

1. La descripción física que provee el estado cuántico es completa.
2. Los estados cuánticos siempre evolucionan de acuerdo con la ecuación de Schrödinger.
3. Las mediciones siempre tienen resultados definidos (es decir, después de un experimento, el mundo es tal que sólo uno de los posibles resultados *de hecho* ocurre).

Para mostrar la incompatibilidad conjunta de estas tres proposiciones, consideremos una medición de espín a lo largo de z de una partícula de espín $1/2$ con estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle + |z_-\rangle)$. Supongamos, primero, que 1 y 2 son verdaderos. Debido a 2, debemos concluir que el estado final del experimento será una superposición del aparato indicando espín arriba y espín abajo. Pero si, como indica 1, el estado cuántico es completo (es decir, representa de manera fiel el estado físico del sistema), entonces no será el caso que dicho experimento concluirá con un resultado definido, como demanda 3. Por otro lado, si suponemos 1 y 3, es claro que

la evolución no puede estar dictada en todo momento por la ecuación de Schrödinger (como requiere 2) ya que esta lleva inevitablemente al aparato a un estado de superposición (el cual es incompatible con 3, si 1 es el caso). Finalmente, si suponemos 2 y 3, la descripción cuántica no puede ser completa (como demanda 1) pues el estado de superposición al que lleva 2 no contiene la información de cuál fue el resultado definido que de hecho se obtuvo (de acuerdo con 3).

La manera en que Maudlin formula el problema resulta especialmente valiosa para motivar, analizar y organizar las distintas alternativas al formalismo cuántico estándar que buscan resolver el problema de la medición. Estas propuestas pueden clasificarse según cuál de las proposiciones se decide rechazar. Bajo esta perspectiva, incluso la mecánica cuántica estándar puede entenderse como un intento (fallido) de resolver el problema mediante la negación de 2, dado que, al introducir el postulado del colapso, los estados cuánticos dejan de evolucionar siempre conforme a la ecuación de Schrödinger.

En particular, si se niega 1, es decir, que el estado es completo, se construyen modelos de variables ocultas, siendo la formulación de onda piloto de de Broglie-Bohm (Bohm, 1952) el ejemplo mejor desarrollado en este sentido. Si se rechaza 2, es decir, que la ecuación de Schrödinger siempre se cumple (y se hace de manera satisfactoria), uno llega, por ejemplo, a los modelos de colapso objetivo (Ghirardi et al., 1986), donde la evolución estándar se complementa con procesos estocásticos, no-lineales, que explican la ausencia de superposiciones macroscópicas tipo el gato de Schrödinger. Finalmente, si se contradice 3, es decir, que las mediciones siempre tienen resultados definidos, uno se acerca a las llamadas interpretaciones Everettianas o de muchos mundos (Everett, 1957), que postulan que todos los posibles resultados de una medición de hecho ocurren.

7. Teorema PBR

Como hemos visto, el estado cuántico juega un papel central en el formalismo estándar. Sin embargo, no es claro cómo debemos interpretarlo, ¿como un elemento objetivo del mundo o simplemente una expresión de nuestro conocimiento del mismo? En Pusey et al. (2012) (PBR), dicha pregunta se explora de manera formal. El punto de partida es trazar una distinción entre lo que llaman un *estado óntico* y un *estado epistémico*. El primero es objetivo e independiente del observador, e.g., un punto en el espacio fase para un sistema clásico. El segundo, en cambio, representa la información que un agente puede tener sobre un sistema, e.g., una distribución de probabilidad sobre el espacio fase.

Con esta distinción en mente, PBR se pregunta cómo podemos interpretar el estado cuántico. Tres posibles respuestas son las siguientes:

1. La función de onda es óntica.
2. La función de onda es epistémica y existe un estado óntico de fondo.
3. La función de onda es epistémica pero no existe una realidad más profunda.

Independientemente del significado del estado cuántico, PBR presupone la existencia de un estado óntico fundamental. Es decir, asumen que el mundo posee un estado físico objetivo, independiente de cualquier observador. Por lo tanto, en el artículo se intenta distinguir entre 1 y 2, pero no se dice nada sobre la opción 3 (que, en cualquier caso, no es claro qué significa).

PBR utiliza el llamado esquema de *modelos ónticos* para desarrollar su trabajo. De acuerdo con dicho esquema, dado un sistema físico, existe un espacio de estados ónticos Λ , análogo al espacio fase en mecánica clásica, y en todo momento, el sistema tiene un estado $\lambda \in \Lambda$ que determina todas sus propiedades. Es decir, λ provee una descripción completa del sistema.

La relación de todo esto con la mecánica cuántica es la siguiente: al preparar un sistema en el estado $|\psi\rangle$, lo que realmente sucede es que el sistema se prepara en alguna λ , escogida de acuerdo con una distribución de probabilidad $\mu_\psi(\lambda)$. Es decir, todo vector cuántico induce una distribución de probabilidad sobre Λ (ver Figura 2).

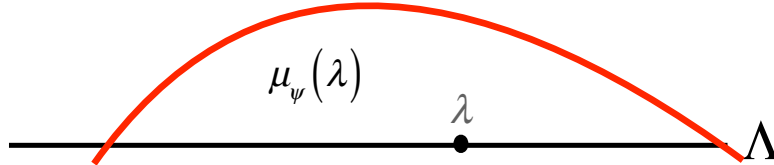


Figura 2: Esquema del espacio de estados ónticos y de la distribución de probabilidad inducida por el estado cuántico.

La conexión entre un modelo óntico y los experimentos está mediada por el objeto $\xi_k^M(\lambda)$, el cual provee la probabilidad de obtener el resultado k en la medición M , si el estado es λ . Por lo tanto, $\xi_k^M(\lambda)$ debe cumplir

$$\sum_k \xi_k^M(\lambda) = 1 \quad (20)$$

para toda M y toda $\lambda \in \Lambda$. Y dado que un estado $|\psi\rangle$ induce una distribución de probabilidad $\mu_\psi(\lambda)$ sobre Λ , la probabilidad de obtener el resultado k en la medición M , si el sistema se

preparó en el estado cuántico $|\psi\rangle$, satisface

$$P_k^M(|\psi\rangle) = \int_{\Lambda} \xi_k^M(\lambda) \mu_{\psi}(\lambda) d\lambda. \quad (21)$$

Finalmente, dado que buscamos que el modelo óntico reproduzca las predicciones del formalismo cuántico estándar, demandamos que $P_k^M(|\psi\rangle)$ coincida con la predicción cuántica correspondiente, dictada por la regla de Born.

Pensemos, ahora, qué sucede si asumimos que el estado cuántico es una propiedad objetiva del sistema. En ese caso, una vez que se especifica el estado óntico completo, λ , el estado cuántico, al representar una propiedad objetiva, debe quedar completamente especificado. De ser así, las distribuciones de probabilidad correspondientes a diferentes estados cuánticos no pueden tener traslape, pues si lo tuvieran, el estado óntico no podría determinar unívocamente el estado cuántico. En contraste, si asumimos que el estado cuántico no es óntico, sino que solo contiene la información que algún agente posee sobre el estado del sistema, entonces es de esperarse que diferentes estados cuánticos sean compatibles con el mismo estado óntico λ (ver Figura 3).

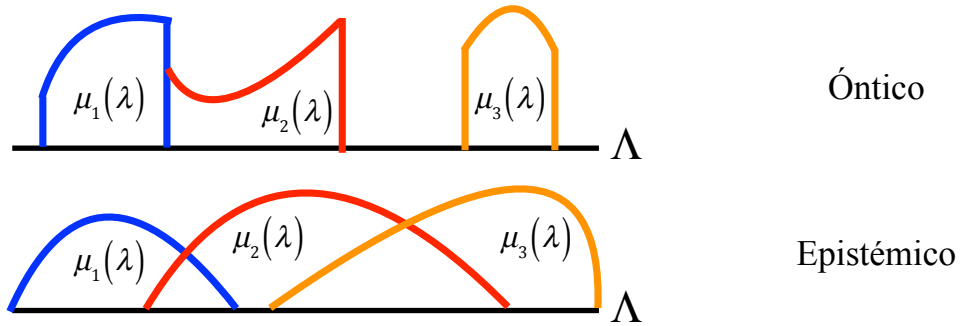


Figura 3: Relación entre el estatus del estado cuántico y la posibilidad de traslape para las distribuciones de probabilidad inducidas.

Antes de avanzar, es importante comparar y diferenciar las distinciones óntico/epistémico y completo/incompleto para el estado cuántico. En el primer caso, uno se pregunta si el estado óntico λ determina de manera única el estado cuántico: si lo hace, el estado cuántico es óntico, de lo contrario es epistémico. Para la distinción completo/incompleto, en cambio, uno se pregunta si el estado cuántico fija por completo el estado óntico: si lo hace, el estado cuántico es completo, de lo contrario, es incompleto (ver Figura 3).

Un último elemento, necesario para describir el resultado de PBR, es lo que ellos llaman

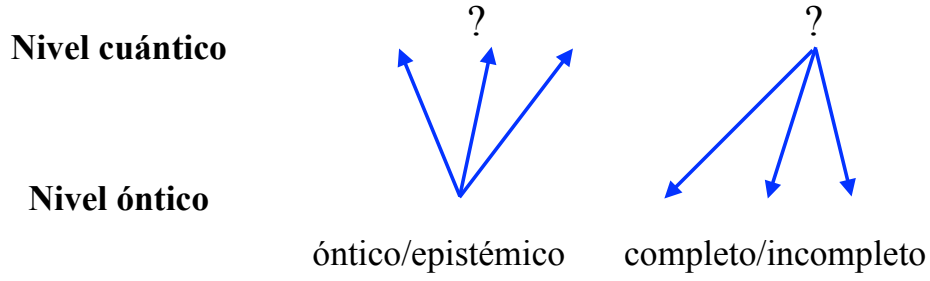


Figura 4: Diferencia entre las categorías óntico/epistémico y completo/incompleto.

el *principio de independencia de preparación* (PIP), el cual sostiene que, cuando se preparan sistemas de manera independiente, el estado del sistema compuesto no es más que el estado de cada una de las partes. Dada la existencia de estados enredados, en el formalismo cuántico no es cierto, en general, que los estados de sistemas compuestos no son más que el estado de cada una de las partes. Sin embargo, tomando en cuenta que para preparar sistemas, es necesario medirlos, y al medir los estados enredados se desenredan, vemos que el PIP sí es válido en la mecánica cuántica estándar. Para probar su resultado, PBR tiene que asumir que el PIP siendo válido en la teoría óntica.

Finalmente, podemos enunciar el resultado de PBR, el cual muestra que, si adoptamos un modelo óntico y asumimos PIP, entonces las distribuciones asociadas a todo par de estados cuánticos necesariamente no tienen traslape. De esto se concluye que el estado cuántico debe ser interpretado de manera óntica y no epistémica. A continuación, presento un esbozo de la prueba.

Lo que se quiere mostrar es que las distribuciones inducidas por todo par de vectores no tienen traslape. Para esto, notamos primero que, si un estado cuántico $|\psi\rangle$ asigna probabilidad cero al resultado k de la medición M , entonces debe ser el caso que $\xi_k^M(\lambda) = 0$ para toda λ en el soporte de $\mu_\psi(\lambda)$.

Con esto en mente, consideremos primero dos estados ortogonales y una medición que contenga a dichos estados como eigenvectores. En ese caso, la medición asignará probabilidad cero al primer estado para el segundo resultado y probabilidad cero al segundo estado para el primer resultado. Ahora, supongamos que las distribuciones inducidas por los estados considerados tienen traslape, es decir, que existe una λ en el soporte de ambas distribuciones. Dado que la probabilidad para el primer resultado es cero para el segundo estado, y viceversa, para esa λ , debemos tener que $\xi_1^M(\lambda) = \xi_2^M(\lambda) = 0$. Pero esto contradice el hecho de que las

probabilidades deben sumar uno, $\xi_1^M(\lambda) + \xi_2^M(\lambda) = 1$. Concluimos, entonces, que no existe una λ en el soporte de ambas distribuciones, así que estas no pueden tener traslape.

A continuación consideremos dos estados tales que $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 1/\sqrt{2}$. En ese caso, existe una base ortonormal $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ tal que $|\psi_1\rangle = |0\rangle$ y $|\psi_2\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle$. Consideremos ahora estados de “dos partículas” y los siguientes estados compuestos

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle, \quad |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle, \quad |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle, \quad |\psi_2\rangle \otimes |\psi_2\rangle. \quad (22)$$

Construimos ahora una medición que proyecta en los estados

$$\begin{aligned} |\chi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle) \\ |\chi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |-\rangle + |1\rangle \otimes |+\rangle) \\ |\chi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |1\rangle + |-\rangle \otimes |0\rangle) \\ |\chi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle). \end{aligned}$$

Se puede mostrar que esta es tal que, el primer estado compuesto es ortogonal al primer resultado, el segundo al segundo, etc. Por lo tanto, asumiendo PIP, podemos usar el mismo argumento que usamos para los estados ortogonales arriba para mostrar que las distribuciones asociadas con $|1\rangle$ y $|2\rangle$ no pueden tener traslape.

Finalmente, para pares de estados arbitrarios, PBR muestra que siempre existe un n tal que, para estados de “ n partículas”, siempre existe una medición que proyecta a una base, tal que el primer estado compuesto es ortogonal al primer resultado, el segundo al segundo, etc. Por lo tanto, asumiendo PIP, se puede usar el mismo argumento para mostrar que las distribuciones asociadas con todo par de estados, no pueden tener traslape. Concluimos, entonces, que, asumiendo PIP, PBR descarta una interpretación epistémica de la función de onda.

8. Conclusiones

En este trabajo, revisamos con cuidado algunos de los teoremas de imposibilidad más importantes en el ámbito de los fundamentos de la mecánica cuántica. Comenzamos con el argumento EPR que, como vimos, muestra que si uno asume que el mundo es local, entonces concluye que la mecánica cuántica no puede ser completa—lo cual es equivalente a que, si la

mecánica cuántica es completa, entonces el mundo no puede ser local. A continuación, revisamos el trabajo de Bell, el cual muestra que, si se asume independencia estadística entre los ajustes de los aparatos de medición, y los estados de los sistemas medidos—una suposición sumamente razonable—entonces se concluye que todo modelo local hace predicciones incompatibles con los resultados experimentales. De esto se sigue que el mundo parece contener aspectos no-locales.

Después, revisamos el Teorema de Kochen-Specker, el cual muestra que es imposible asignar valores definidos de manera no contextual a todas las observables cuánticas. Esto, sin embargo, deja abierta la puerta para teorías de variables ocultas contextuales. Acto seguido, revisamos el llamado trilema de Maudlin, que muestra que es lógicamente inconsistente sostener, al mismo tiempo que el estado cuántico es completo, que siempre evoluciona de acuerdo con la ecuación de Schrödinger y que las mediciones siempre tienen resultados definidos. Por lo tanto, cualquier formalismo cuántico debe negar al menos una de estas suposiciones. Finalmente, revisamos el Teorema PBR, el cual impone una interpretación óptica, objetiva e independiente del observador para el estado cuántico. Mediante estos resultados, se intenta proporcionar un marco conceptual sólido con el fin de explorar preguntas fundacionales en torno a la mecánica cuántica de manera mas rigurosa y objetiva.

Agradecimientos

Agradezco el apoyo del proyecto PAPIIT IG100124.

Referencias

- Albert, D. (1992). *Quantum Mechanics and Experience*. Harvard University Press.
- Aspect, A., Dalibard, J., and Roger, G. (1982). Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. *Physical Review Letters*, 49:1804–1807.
- Aspect, A., Grangier, P., and Roger, G. (1981). Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem. *Physical Review Letters*, 47:460–443.
- Bell, J. (1981). Quantum mechanics for cosmologists. In *Quantum Gravity II*. Oxford University Press.
- Bell, J. S. (1964). On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox. *Physics*, 1:195–200.
- Bell, J. S. (1976). The theory of local beables. *Epistemological Letters*, 9:11–24.

- Bell, J. S. (1990). La nouvelle cuisine. In Sarlemijn, A. and Kroes, P., editors, *Between Science and Technology*. Elsevier Science Publishers.
- Bohm, D. (1952). A suggested interpretation of quantum theory in terms of ‘hidden’ variables. *Phys. Rev.*, 85:166–193.
- Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A., and Holt, R. A. (1969). Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical Review Letters*, 23:880–884.
- Dirac, P. (1930). *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press.
- Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? *Physical Review*, 47:777–780.
- Everett, H. (1957). ‘relative state’ formulation of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 29(3).
- Ghirardi, G. C., Rimini, A., and Weber, T. (1986). Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems. *Phys. Rev. D*, 34:470–491.
- Kochen, S. and Specker, E. P. (1967). The problem of hidden variables in quantum mechanics. *J. Math. Mech.*, 19:59–87.
- Maudlin, T. (1995). Three measurement problems. *Topoi*, 14.
- Mermin, N. D. (1993). Hidden variables and the two theorems of John Bell. *Reviews of Modern Physics*, 65.
- Pusey, M. F., Barrett, J., and Rudolph, T. (2012). On the Reality of the Quantum State. *Nature Physics*, 8(6):475–478.
- von Neumann, J. (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer.